Postverlagsort Berlin

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNIVERSITY OF HAWAII
LIBRARY

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE A. E. INGHAM H. KNESER
W. MAGNUS O. PERRON G. PICKERT

75. BAND, 1. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 19. DEZEMBER 1960)

QA1
M88
v.75-77

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1961

Math. Z.

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

Die Zeitschrift erscheint zur Ermöglichung rascher Veröffentlichung nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Grundsätzlich dürfen nur Arbeiten eingereicht werden, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Der Autor verpflichtet sich, sie auch nachträglich nicht an anderer Stelle zu publizieren. Mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag geht das Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder einschließlich des Rechts der fotomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung an den Verlag über. Jedoch wird gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch nach Maßgabe des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e.V. und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens die Anfertigung einer fotomechanischen Vervielfältigung gestattet. Wenn für diese Zeitschrift kein Pauschalabkommen mit dem Verlag vereinbart worden ist, ist eine Wertmarke im Betrage von DM 0.30 pro Seite zu verwenden. *Der Verlag läßt diese Beträge den Autorenverbänden zufließen.*

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z.B. die Landauschen Symbole o und O, sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,
R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Math. Inst. d. Universität, Portania.
F. K. Schmidt, Heidelberg, Mathematisches Institut,
H. Wielandt, Tübingen, Ob dem Viehweidle 21 b.

Springer-Verlag OHG — Berlin-Wilmersdorf, Heidelberger Platz 3 — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 28/30. — Göttingen, Weender Straße 60.

---

75. Band **Inhalt** **1. Heft**

Seite

Tschauner, J., Zur Erzeugung der Gegenbauerschen Polynome 1
Friedberg, R., The uniqueness of finite division for recursive equivalence types . 3
Cigler, J., Ziffernverteilung in ϑ-adischen Brüchen 8
Nöbauer, W., Über die Ableitungen der Vollideale 14
Baumslag, G., Wreath products and finitely presented groups 22
Charzynski, Z., Bounds for analytic functions of two complex variables 29
Roelcke, W., Über diskontinuierliche Gruppen in lokal-kompakten Räumen . . . 36
Tomić, M., Über trigonometrische Sinus-Reihen mit positiven Koeffizienten 53
Wiegold, J., Some remarks on generalised products of groups with amalgamations 57
MacRobert, T. M., Fourier Series for E-functions 79
Felscher, W., Jordan-Hölder-Sätze und modular geordnete Mengen 86

TSCHAUNER, J.
Math. Zeitschr. 75, 1/2 (1961)

Zur Erzeugung der Gegenbauerschen Polynome

Von
JOHANN TSCHAUNER

In [5] wurde aus der Rekursionsformel für die Kugelfunktionen eine Differentialgleichung ihrer erzeugenden Funktion gewonnen, die im Sonderfall der zugeordneten Legendreschen Polynome eine einfache Lösung zuließ. Im folgenden wird das gleiche Verfahren zur Herleitung einer Differentialgleichung der erzeugenden Funktion von Gegenbauerschen Polynomen verwendet. Ihre Lösung ergibt die in der Literatur [3], [4] bekannte erzeugende Funktion der „abgewandelten" Gegenbauerschen Polynome.

Die Gegenbauerschen Polynome $u_n(x, p) = C_n^{p+\frac{1}{2}}(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ $p > -\frac{1}{2}$, befriedigen die bekannte Rekursionsformel [1]

$$(n+2)\,u_{n+2} - (2n+3+2p)\,x\,u_{n+1} + (n+1+2p)\,u_n = 0 \tag{1}$$

mit $u_0 = 1$, $u_1 = x(1+2p)$. Die aus den u_n nach Division durch eine Γ-Funktion hervorgehenden abgewandelten Gegenbauerschen Polynome

$$v_n(x, p) = \frac{u_n}{\Gamma(1+n+2p)} = \frac{C_n^{p+\frac{1}{2}}}{\Gamma(1+n+2p)} \tag{2}$$

genügen daher der neuen Rekursionsformel

$$(n+2)\,(n+2+2p)\,v_{n+2} - (2n+3+2p)\,x\,v_{n+1} + v_n = 0 \tag{3}$$

mit

$$v_0 = \frac{1}{\Gamma(1+2p)}\,, \quad v_1 = \frac{(1+2p)\,x}{\Gamma(2+2p)} = \frac{x}{\Gamma(1+2p)}\,.$$

Die Anfangswerte v_0, v_1 erfüllen die Beziehung

$$v_1 - x\,v_0 = 0. \tag{4}$$

Multipliziert man die Rekursionsformel (3) mit t^n und summiert über n von Null bis Unendlich, dann findet man für die erzeugende Funktion

$$V(t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n\,t^n \tag{5}$$

der abgewandelten Polynome v_n eine wegen des Bestehens von (4) *homogene* Differentialgleichung 2. Ordnung

$$t\,\ddot{V} + (1+2p-2xt)\,\dot{V} + [t-(1+2p)\,x]\,V = (1+2p)\,(v_1 - x\,v_0) = 0, \tag{6}$$

welche, wie eine Substitution

$$V(t) = e^{xt}\,t^{-p}\,W(t)$$

zeigt, mit der Besselschen Differentialgleichung

$$t^2 \ddot{W} + t \dot{W} + (y^2 t^2 - p^2) W = 0 \tag{7}$$

verwandt ist. Darin bedeutet $y = \sqrt{1 - x^2}$. Partikuläre Lösungen der Gl. (6) sind daher

$$A\, e^{xt} t^{-p} J_p(yt), \qquad B\, e^{xt} t^{-p} N_p(yt).$$

Da $V(0) = v_0$ endlich ist, kommt hier nur die im Nullpunkt endliche partikuläre Lösung

$$V(t) = A\, e^{xt} t^{-p} J_p(yt)$$

in Betracht. Der Normierungsfaktor A ergibt sich aus der Anfangsbedingung

$$V(0) = v_0 = \frac{1}{\Gamma(1+2p)} = A \frac{y^p}{2^p \Gamma(1+p)}, \qquad A = \frac{2^p y^{-p} \Gamma(1+p)}{\Gamma(1+2p)}.$$

Man findet also die erzeugende Funktion der abgewandelten Gegenbauerschen Polynome

$$V(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n^{p+\frac{1}{2}}(x)}{\Gamma(1+n+2p)} t^n = \frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma(1+2p)} e^{xt} \left(\frac{yt}{2}\right)^{-p} J_p(yt), \tag{8}$$

welche eine Beziehung dieser Polynome zu den Besselschen Funktionen erster Art herstellt. Sie wurde schon in [3] in anderer Weise hergeleitet. Ihre Wiedergabe in [3] und [4] enthält aber offenbar einen Druckfehler (statt $[\frac{1}{2} t^2 y^2]^{-\alpha}$ lies rechts $[\frac{1}{2} t y]^{-\alpha} \Gamma(1+\alpha)$).

Im Sonderfall $p = 0$ wird $C_n^{p+\frac{1}{2}}(x) = P_n(x)$. Aus Gl. (8) folgt für $p = 0$ unmittelbar die schon von RAINVILLE [2] auf anderem Wege erhaltene erzeugende Funktion

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(x)}{n!} t^n = e^{xt} J_0(yt) \tag{9}$$

für die abgewandelten Legendreschen Polynome.

Literatur

[1] MAGNUS, W., u. F. OBERHETTINGER: Formeln und Sätze der speziellen Funktionen der mathematischen Physik, S. 98. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1948.
[2] RAINVILLE, E. D.: Bull. Amer. Math. Soc. **51**, 268–271 (1945).
[3] TRUESDELL, C. A.: An essay toward a unified theory of special functions, S. 101. Princeton University Press 1948.
[4] ERDÉLYI, A., MAGNUS, W., OBERHETTINGER, F., TRICONI, F. G.: Higher transcendental functions, Bd. 3, S. 262. New York-Toronto-London 1955.
[5] TSCHAUNER, J.: Über einen Zusammenhang zwischen den Kugelfunktionen und Zylinderfunktionen. Math. Z. **73**, 457 (1960).

Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt, (13b) Oberpfaffenhofen, Post Weßling

(Eingegangen am 4. März 1960)

FRIEDBERG, R.
Math. Zeitschr. 75, 3–7 (1961)

The uniqueness of finite division for recursive equivalence types

By
RICHARD FRIEDBERG

THEOREM. *Let A and B be recursive equivalence types [1]. Let n be a positive integer. Let multiplication by n denote multiplication [1] by a recursive equivalence type of cardinality n. Then*

$$nA = nB \Rightarrow A = B. \tag{1}$$

PROOF. Let ε be the set of all non-negative integers. Let α and β be subsets of ε which represent A and B respectively. Let h be some n-to-one recursive function which maps ε onto ε. Then $h^{-1}(\alpha)$ and $h^{-1}(\beta)$ are sets which represent nA and nB respectively. (This follows from the definition of multiplication in [1].)

Assume the left side of (1) is true. Then there is a partial recursive one-one function, φ, which maps $h^{-1}(\alpha)$ onto $h^{-1}(\beta)$. The right side of (1) will be true if there exists a partial recursive one-one function, ψ, which maps α onto β. We shall prove that ψ exists by constructing it from φ.

Since φ is partial recursive, it is possible, by a constructive procedure, to list without repetition all the pairs (x, y) for which $\varphi(x) = y$. The list does not terminate unless α and β are finite, in which case (1) is obvious. Assume the list is infinite, and let $\big(x(a), y(a)\big)$ be the a'th pair on it, for each $a \in \varepsilon$. Then x and y are recursive one-one functions. (We shall use the letters x, y, p, q sometimes for functions and sometimes for their values. When we use them for functions we shall say so explicitly.)

We now define three recursive predicates C, S_1, S_2:

$$\begin{cases} C(a,p,q) \equiv_{\text{def}} (E\,m)\,(E\,p_0, q_0, p_1, q_1, \ldots, p_m, q_m)\,[p_0 = p \;\&\; q_m = q \\ \qquad\qquad \&\; (r)_m\,(E\,a')_a \big(h(x(a')) = p_r \;\&\; h(y(a')) = q_r\big) \\ \qquad\qquad \&\; (r)_{m-1}\,(E\,a')_a \big(h(x(a')) = p_{r+1} \;\&\; h(y(a')) = q_r\big)]; \end{cases} \tag{2}$$

$$S_1(a,p) \equiv_{\text{def}} (E\,a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} \leqq a)\,(r)_{n-1}\big(h(x(a_r)) = p\big); \tag{3}$$

$$S_2(a,q) \equiv_{\text{def}} (E\,a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} \leqq a)\,(r)_{n-1}\big(h(y(a_r)) = q\big). \tag{4}$$

We now define two recursive one-one functions p, q:

For each $a \in \varepsilon$, let $p(a) =_{\text{def}}$ the smallest p (if any exist) which satisfies

$$\begin{cases} S_1(a,p) \;\&\; (\overline{E}\,a')_{a-1}\,(p(a') = p) \;\&\; (E\,q) \times \\ \qquad\qquad \times [S_2(a,q) \;\&\; (\overline{E}\,a')_{a-1}\,(q(a') = q) \;\&\; C(a,p,q)]. \end{cases} \tag{5}$$

If $p(a)$ satisfies (5), let $q(a) =_{\text{def}}$ the smallest q which satisfies

$$S_2(a, q) \,\&\, (\overline{E}\, a')_{a-1}\,(q(a') = q) \,\&\, C(a, p(a), q). \tag{6}$$

If no p satisfies (5), this will be known after a finite search, because only those values of p and q which are respectively values of $h(x(a'))$ and $h(y(a'))$ for some $a' \leqq a$ need be considered. Then let $p(a)$, $q(a)$ both have no value in ε. (The non-existence of $p(a)$, $q(a)$ is a fact yielded definitely by the recursion and may be referred to in verifying (5) and (6) for higher values of a.)

We now define a partial recursive function ψ:

For any $p \in \varepsilon$, $q \in \varepsilon$, let

$$\psi(p) = q \equiv_{\text{def}} (E\, a)\,\big(p(a) = p \,\&\, q(a) = q\big). \tag{7}$$

By a sequence of lemmas we shall show that ψ is the desired function.

(The sense of the construction is as follows. The relation $q = h\varphi h^{-1}(p)$ links numbers p and q into chains. $C(a, p, q)$ says that p and q are connected by a chain and therefore (by *Lemma* IV) we are allowed to put $\psi(p) = q$. Doing this at step a means putting $p(a) = p$, $q(a) = q$. Thus we build up ψ. However, we do not always put $\psi(p) = q$ when allowed, for then it might happen that some $p \in \alpha$ was never connected by a chain to any q that was not already assigned as the value of $\psi(p')$ for a $p' \neq p$. Instead, we assign arguments and values to ψ according to the conditions (5) and (6). This ensures that *Lemmas* V and VI are true, as will be shown.)

For each a, p, q, we define two finite sets:

$$\gamma_1(a, p) =_{\text{def}} \{p' \mid S_1(a, p') \,\&\, (p' = p \vee (E\, q')\,(C(a, p, q') \,\&\, C(a, p', q')))\}; \tag{8}$$

$$\gamma_2(a, q) =_{\text{def}} \{q' \mid S_2(a, q') \,\&\, (q' = q \vee (E\, p')\,(C(a, p', q) \,\&\, C(a, p', q')))\}. \tag{9}$$

LEMMA I.

$$(E\, a')_a\,\big(h(x(a')) \in \gamma_1(a, p) \,\&\, h(y(a')) = q\big) \Rightarrow C(a, p, q);$$

$$(E\, a')_a\,\big(h(y(a')) \in \gamma_2(a, q) \,\&\, h(x(a')) = p\big) \Rightarrow C(a, p, q).$$

PROOF. Suppose that $p' = h(x(a')) \in \gamma_1(a, p) \,\&\, a' \leqq a$. Then either $p' = p$, in which case the lemma is obvious, or there exists q' such that $C(a, p, q') \,\&\, C(a, p', q')$; that is, there exist two chains,

$$p, q_{10}, p_{11}, q_{11}, \ldots, p_{1m_1}, q'$$

and

$$p', q_{20}, p_{21}, q_{21}, \ldots, p_{2m_2}, q',$$

each of which satisfies the right side of (2). Now, if $h(y(a')) = q$, then the chain

$$p, q_{10}, p_{11}, q_{11}, \ldots, p_{1m_1}, q', p_{2m_2}, \ldots, q_{21}, p_{21}, q_{20}, p', q$$

satisfies the right side of (2) with $m = m_1 + m_2 + 1$. Therefore $C(a, p, q)$.

Similarly if $q' = h(y(a')) \in \gamma_2(a, q)$, etc.

LEMMA II. *Suppose that*

A. $S_1(a, p)$

and

B. $(q)\left(C(a, p, q) \Rightarrow (E\,a')_a\,(q(a') = q)\right)$;

then

$$(E\,a')_a\,(p(a') = p).$$

Similarly interchanging the roles of p and q, γ_1 and γ_2, S_1 and S_2.

PROOF. Let

$$\delta = \{h(y(a')) \mid a' \leqq a \,\&\, h(x(a')) \in \gamma_1(a, p)\} \tag{10}$$

and

$$\eta = \{p(a') \mid a' \leqq a \,\&\, q(a') \in \delta\}. \tag{11}$$

By Lemma I,

$$(q)\,(q \in \delta \Rightarrow C(a, p, q)). \tag{12}$$

By (5),

$$p' \in \eta \Rightarrow S_1(a, p'). \tag{13}$$

By (6),

$$q(a') = q \in \delta \Rightarrow C(a', p(a'), q). \tag{14}$$

By (2),

$$a' \leqq a \,\&\, C(a', p', q) \Rightarrow C(a, p', q). \tag{15}$$

Combining (14), and (15) with (11), we have

$$(p')\left(p' \in \eta \Rightarrow (E\,q)\,(q \in \delta \,\&\, C(a, p', q))\right). \tag{16}$$

Combining (16) with (12), and using (8), and (13)

$$\eta \subseteq \gamma_1(a, p). \tag{17}$$

Now suppose that $\gamma_1(a, p)$ has r members. By (3), there must be nr distinct values of $a' \leqq a$ such that $h(x(a')) \in \gamma_1(a, p)$. But y and h are one-one and n-one functions, respectively; therefore, by (10), δ has at least r members. From (12) and hypothesis B, it now follows that there are at least r values of $a' \leqq a$ for which $q(a') \in \delta$. But p is a one-one function; therefore by (11), η has at least r members — that is, no fewer than $\gamma_1(a, p)$.

Combining this result with (17), we have

$$\gamma_1(a, p) = \eta. \tag{18}$$

Combining (18), (8), hypothesis A, and (11), we have

$$(E\,a')_a\,(p(a') = p). \tag{19}$$

Similarly with p and q, etc., interchanged.

LEMMA III.

$$(p)\,\big(p \in \alpha \Rightarrow (E\,a_1)\,(a)\,(a \geqq a_1 \Rightarrow S_1(a, p))\big);$$

$$(q)\,\big(q \in \beta \Rightarrow (E\,a_1)\,(a)\,(a \geqq a_1 \Rightarrow S_2(a, q))\big).$$

PROOF. From definitions we have

$$\alpha, \beta \subseteq \textit{range}\ h;$$

$$h \text{ is a } n\text{-one function};$$

$$h^{-1}(\alpha) \subseteq \textit{range}\ x;$$

$$h^{-1}(\beta) \subseteq \textit{range}\ y.$$

The lemma follows directly, using (3) and (4).

LEMMA IV. *If* $C(a, p, q)$, *then* $p \in \alpha \Leftrightarrow q \in \beta$.

PROOF. For each a', we have

$$h\,(x(a')) \in \alpha \Leftrightarrow x\,(a') \in h^{-1}(\alpha) \Leftrightarrow y\,(a') \in h^{-1}(\beta) \Leftrightarrow h\big(y\,(a')\big) \in \beta.$$

The lemma follows directly, using (2).

LEMMA V. $(p)\,\big(p \in \alpha \Rightarrow (E\,a)\,(p\,(a) = p)\big)$.

PROOF. Suppose the lemma false. Let $\overline{p} \in \alpha$ and

(20) $$(\overline{E}\,a)\,(p\,(a) = \overline{p}).$$

Applying Lemma III, and using the fact that p is a one-one function, let a_1 be so large that

(21) $$(a)\,(a \geqq a_1 \Rightarrow S_1(a, p))$$

and

(22) $$(a)\,(p\,(a) < \overline{p} \Rightarrow a < a_1).$$

By (20), (21), and Lemma II, we can find $\overline{q}$ so that

(23) $$C(a_1, \overline{p}, \overline{q})\ \&\ (\overline{E}\,a)_{a_1}(q(a) = \overline{q}).$$

By Lemma IV and (23), $\overline{q} \in \beta$. Applying Lemma III, let $\overline{a}$ be the least $a \geqq a_1$ such that $S_2(a, \overline{q})$. Then, combining (21), (20), and (23), we see that $\overline{a}, \overline{p}, \overline{q}$ satisfy (5). Therefore $p\,(\overline{a}) \leqq \overline{p}$. But since $a \geqq a_1$, this contradicts either (20) or (22). The lemma is proved.

LEMMA VI. $(q)\,\big(q \in \beta \Rightarrow (E\,a)\,(q\,(a) = q)\big)$.

PROOF. Suppose the lemma false. Let $\overline{q} \in \beta$ and

(24) $$(\overline{E}\,a)\,(q\,(a) = \overline{q}).$$

As in the proof of Lemma V, we can find a_1, $\overline{p}$, such that

(25) $$(a)\,(a \geqq a_1 \Rightarrow S_2(a, \overline{q})),$$

(26) $$(a)\,(q\,(a) < \overline{q} \Rightarrow a < a_1),$$

(27) $$C(a_1, \overline{p}, \overline{q})\ \&\ (\overline{E}\,a)_{a_1}(p\,(a) = \overline{p}).$$

By (27) and Lemma IV, $\overline{p} \in \alpha$. Therefore, by Lemma V, $p(a) = \overline{p}$ for some a, let us say for $a = \overline{a}$. By (27), $\overline{a} \geqq a_1$. Hence, from (24), (25), and (27), we see that $\overline{a}$, $\overline{q}$ satisfy (6). Therefore $q(\overline{a}) \leqq \overline{q}$. This contradicts (24) or (26). The lemma is proved.

LEMMA VII. $\qquad p(a) \in \alpha \Leftrightarrow q(a) \in \beta.$

PROOF. This follows from (6) and Lemma IV.

ψ is a one-one function because p and q are one-one functions. By Lemma V, $\alpha \subseteq$ *domain* ψ. By Lemma VI, $\beta \subseteq$ *range* ψ. By Lemma VII, if $\psi(p) = q$, then $p \in \alpha \Leftrightarrow q \in \beta$. Therefore ψ maps α one-one onto β. The theorem is proved.

OPEN PROBLEMS.

1. Can other functions take the place of multiplication in this theorem?
2. Can n in this theorem be replaced by an infinite isol?

References

[1] DEKKER, J. C. E.: Congruences in Isols with a Finite Modulus. Math. Z. **70**, 113–124 (1958).

Dept. of Math., Columbia University, New York (U.S.A.)

(Eingegangen am 21. März 1960)

CIGLER, J.
Math. Zeitschr. 75, 8–13 (1961)

Ziffernverteilung in ϑ-adischen Brüchen

Von
JOHANN CIGLER

Jede reelle Zahl α, $0 \leqq \alpha \leqq 1$, läßt sich — bei festem reellem $\vartheta > 1$ und gegebenem n — in der Gestalt

$$\alpha = \sum_1^{\infty} \frac{\lambda_k}{\vartheta^k} = \sum_1^{n} \frac{\lambda_k}{\vartheta^k} + \frac{x_n}{\vartheta^n} \tag{1}$$

darstellen, wobei die λ_k ganz sind mit $0 \leqq \lambda_k < \vartheta$ und für die reellen Zahlen x_k die Ungleichung $0 \leqq x_k < 1$ gilt. Die Darstellung (1) ist eindeutig, wenn man die Zahlen λ_k und x_k durch die folgende Rekursionsformel bestimmt[1]):

$$\begin{cases} x_0 = \alpha, & x_1 = \{\vartheta x_0\}, \ldots, x_{k+1} = \{\vartheta x_k\}, \ldots \\ \lambda_0 = 0, & \lambda_1 = [\vartheta x_0], \ldots, \lambda_{k+1} = [\vartheta x_k], \ldots \end{cases} \qquad (\{x\} = x - [x]). \tag{2}$$

Hier sind natürlich $\lambda_k = \lambda_k(\alpha)$ und $x_k = x_k(\alpha)$ Funktionen von α. Wir setzen im folgenden stets $\lambda_k(1) = a_k$ und $x_k(1) = t_k$.

Ist $\vartheta = q$ ganz, so ergibt sich die gewöhnliche q-adische Entwicklung. In diesem Falle ist bekanntlich die Folge $x_n(\alpha)$ für fast alle α gleichverteilt. A. RÉNYI [5] bewies 1957, daß bei jedem $\vartheta > 1$ die Folgen $x_n(\alpha)$ für fast alle α eine Verteilungsfunktion besitzen, die von α unabhängig ist. Im Spezialfall $\vartheta = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ fand er eine explizite Darstellung. Im allgemeinen Fall wurde sie 1959 von A. O. GELFOND [3] bestimmt. Während RÉNYIs Beweis auf ergodentheoretischen Überlegungen beruht, verwendet A. O. GELFOND Sätze aus der Funktionentheorie und elementare Abschätzungen. Wir geben im folgenden einen kurzen Neubeweis des Gelfondschen Resultats, dessen Grundgedanke derselbe wie bei RÉNYI ist. Anschließend untersuchen wir einige Folgerungen, die sich daraus für die Verteilung der Ziffern in ϑ-adischen Brüchen ergeben.

1. Die Transformation $Tx = \{\vartheta x\}$

Die Transformation T ist eine Transformation des Intervalls $[0, 1)$ auf sich. Wir zeigen, daß ein Maß μ existiert, das invariant bezüglich T und äquivalent zum Lebesgueschen Maß ist.

SATZ 1. *Es sei $\varphi_\gamma(t)$ die charakteristische Funktion des Intervalls $[0, \gamma)$ und $C[0, 1)$ der Raum aller stetigen Funktionen mit der Periode 1. Es sei ferner*

$$\sigma_0(t) = \sigma_0^{(\vartheta)}(t) = \frac{1}{\tau} \sum_0^{\infty} \frac{\varphi_{t_k}(t)}{\vartheta^k}, \qquad \tau = \sum_0^{\infty} \frac{t_k}{\vartheta^k},$$

[1]) Für $\alpha = 1$ gilt (2) nur für nichtganzzahliges ϑ.

und $\mu(f)$ das positive lineare Funktional, das jeder Funktion $f \in C[0,1)$ die Zahl $\mu(f) = \int_0^1 f(t)\,\sigma_0(t)\,dt$ zuordnet. Dann ist das durch μ auf allen Borel-Mengen erklärte Maß invariant bezüglich T und äquivalent zum Lebesgueschen Maß.

Beweis. a) Das Maß μ ist äquivalent mit dem Lebesgueschen Maß, d.h. besitzt dieselben Nullmengen: Wie man sofort sieht, gibt es zwei Konstante c_1 und c_2, für die $0 < c_1 < \sigma_0(t) < c_2$ gilt. Ist nun A eine beliebige Borel-Menge, so ergibt sich also $c_1 \int_A dt < \int_A \sigma_0(t)\,dt < c_2 \int_A dt$, woraus die Behauptung unmittelbar folgt.

b) Invarianz. Wir müssen zeigen, daß die Relation $\int_0^1 f(\vartheta t)\,\sigma_0(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,\sigma_0(t)\,dt$ für jede stetige Funktion f mit der Periode 1 gilt. Das ergibt sich aber folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
\tau \int_0^1 f(\vartheta t)\,\sigma_0(t)\,dt &= \sum_0^\infty \frac{1}{\vartheta^k} \int_0^1 \varphi_{t_k}(t)\, f(\vartheta t)\,dt \\
&= \sum_0^\infty \frac{1}{\vartheta^k} \int_0^{t_k} f(\vartheta t)\,dt = \sum_0^\infty \frac{1}{\vartheta^{k+1}} \int_0^{\vartheta t_k} f(t)\,dt \\
&= \sum_0^\infty \frac{1}{\vartheta^{k+1}} \int_0^{[\vartheta t_k]} f(t)\,dt + \sum_0^\infty \frac{1}{\vartheta^{k+1}} \int_{[\vartheta t_k]}^{\vartheta t_k} f(t)\,dt \\
&= \sum_0^\infty \frac{a_{k+1}}{\vartheta^{k+1}} \int_0^1 f(t)\,dt + \sum_0^\infty \frac{1}{\vartheta^{k+1}} \int_0^{t_{k+1}} f(t)\,dt \\
&= \sum_0^\infty \frac{1}{\vartheta^k} \int_0^{t_k} f(t)\,dt = \tau \int_0^1 f(t)\,\sigma_0(t)\,dt, \qquad \text{wzbw.}
\end{aligned}$$

Satz 2. *Die Transformation T ist ergodisch (bezüglich des Lebesgueschen Maßes).*

Beweis. Eine Transformation ist genau dann ergodisch, wenn jede invariante Menge E ($T^{-1}x \in E$ für fast alle $x \in E$) entweder das Maß Null oder Eins besitzt.

Mit $|E|$ bezeichnen wir das Lebesguesche Maß von E. Es sei E eine invariante Menge mit $|E| = d < 1$. Wir werden zeigen, daß dann die Menge E an jedem ihrer Punkte eine Dichte < 1 besitzt, woraus nach dem Lebesgueschen Dichtesatz (s. z.B. [4], S. 264) folgt, daß $|E| = 0$ ist und damit die Behauptung unseres Satzes gilt.

Mit J bezeichnen wir die Menge aller Intervalle der Gestalt $\left[\frac{\lambda_1}{\vartheta} + \cdots + \frac{\lambda_n}{\vartheta^n}, \frac{\lambda_1}{\vartheta} + \cdots + \frac{\lambda_n^*}{\vartheta^n}\right)$, d.h. aller Intervalle, in denen die ersten n Ziffern feste Werte besitzen (die natürlich zulässig sein müssen, womit gemeint ist, daß sie in

der Entwicklung mindestens einer Zahl α wirklich auftreten). Wir nennen diese Intervalle Grundintervalle n-ter Stufe. Die Zahl λ_n^* ist dabei so gewählt, daß der Punkt $\frac{\lambda_1}{\vartheta}+\frac{\lambda_2}{\vartheta^2}+\cdots+\frac{\lambda_n^*}{\vartheta^n}$ der rechte Endpunkt des entsprechenden Intervalles ist. Es ist nicht immer $\lambda_n^*=\lambda_n+1$, weil mit der Ziffernsequenz $[\lambda_1\,\lambda_2\ldots\lambda_n]$ nicht notwendig auch die Sequenz $[\lambda_1\,\lambda_2\ldots(\lambda_n+1)]$ zulässig ist. Offenbar kann man jedes offene Intervall als Vereinigung von höchsten abzählbar vielen punktfremden Grundintervallen darstellen. Es genügt also zu zeigen, daß $\frac{|E\cap j|}{|j|}\leqq d<1$ für jedes $j\in J$ gilt. (Daraus folgt dann dieselbe Relation für eine beliebige offene Menge j.) Das ergibt sich aber, wenn man die charakteristische Funktion

$$\varphi_E(x)\begin{cases}=1 & x\in E\\ =0 & x\notin E\end{cases}\pmod 1$$

einführt, folgendermaßen:

$$|E\cap j|=\int\limits_{\frac{\lambda_1}{\vartheta}+\frac{\lambda_2}{\vartheta^2}+\cdots+\frac{\lambda_n}{\vartheta^n}}^{\frac{\lambda_1}{\vartheta}+\cdots+\frac{\lambda_n^*}{\vartheta^n}}\varphi_E(x)\,dx=\int\limits_{\frac{\lambda_1}{\vartheta}+\cdots+\frac{\lambda_n}{\vartheta^n}}^{\frac{\lambda_1}{\vartheta}+\cdots+\frac{\lambda_n^*}{\vartheta^n}}\varphi_E(\vartheta x)\,dx$$

$$=\frac{1}{\vartheta}\int\limits_{\frac{\lambda_2}{\vartheta}+\cdots+\frac{\lambda_n}{\vartheta^{n-1}}}^{\frac{\lambda_2}{\vartheta}+\cdots+\frac{\lambda_n^*}{\vartheta^{n-1}}}\varphi_E(x)\,dx=\cdots=\frac{1}{\vartheta^n}\int\limits_0^{\lambda_n^*-\lambda_n}\varphi_E(x)\,dx\leqq d|j|,\qquad\text{wzbw.}$$

BEMERKUNG. Die beiden Sätze gelten auch im k-dimensionalen Fall. Dabei ist $T(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)})=\big(\{\vartheta_1 x^{(1)}\}, \ldots, \{\vartheta_k x^{(k)}\}\big)$, $\vartheta_i>1$ $(i=1, 2, \ldots, k)$ und $\sigma_0^{(\vartheta_1\cdots\vartheta_k)}(t_1, \ldots, t_k)=\prod\limits_{i=1}^{k}\sigma_0^{(\vartheta_i)}(t_i)$ zu setzen. Die Beweise sind fast wörtlich vom eindimensionalen Fall zu übertragen.

FOLGERUNGEN. 1. Für fast alle $\alpha\in[0, 1)$ besitzt die Folge $x_n(\alpha)$ die Verteilungsfunktion $\sigma(t)=\int\limits_0^t\sigma_0(t)\,dt=\mu\big([0, t)\big)$. Analog im mehrdimensionalen Fall.

2. Besitzt die Folge $x_n(\alpha)$ die Verteilungsfunktion $\sigma(t)$, dann auch jede Teilfolge der Gestalt $x_{kn+l}(\alpha)$.

BEWEIS. 1. ist unmittelbar klar, weil die Transformation T ergodisch ist, und 2. folgt z.B. aus [2], Satz 7.

2. Die Verteilung der Ziffern in ϑ-adischen Brüchen

Die Folge $x_\nu(\alpha)$ besitze das Verteilungsmaß μ. Was folgt daraus für die Verteilung der Ziffern $\lambda_\nu(\alpha)$? Zunächst einige Vorbemerkungen! Es sei $\alpha=\frac{\lambda_1}{\vartheta}+\frac{\lambda_2}{\vartheta^2}+\cdots+\frac{\lambda_\nu}{\vartheta^\nu}+\cdots$. Wir bilden aus den Ziffern λ_ν die Folge der n-gliedrigen Sequenzen $s_\nu=[\lambda_{\nu+1}\,\lambda_{\nu+2}\ldots\lambda_{\nu+n}]$ $(\nu=0, 1, 2, 3, \ldots)$. Dabei sei

n eine beliebige natürliche Zahl. Sei $c=[c_1\, c_2 \dots c_n]$ eine feste Sequenz. Wir bezeichnen mit $N_p(s_\nu=c)$ die Anzahl der Sequenzen s_ν mit $0\leqq\nu<p$, für die $s_\nu=c$ ist. Den Limes $\lim\limits_{p\to\infty}\frac{1}{p}N_p(s_\nu=c)=P(s_\nu=c)$ nennen wir die Wahrscheinlichkeit des Auftretens der Ziffernsequenz c. Dieser Grenzwert existiert stets, und zwar ist

$$P(s_\nu=c)=\mu\left(\left[\frac{c_1}{\vartheta}+\frac{c_2}{\vartheta^2}+\dots+\frac{c_n}{\vartheta^n},\ \frac{c_1}{\vartheta}+\frac{c_2}{\vartheta^2}+\dots+\frac{c_n^*}{\vartheta^n}\right)\right),$$

denn $s_{\nu+1}=c$ ist gleichbedeutend mit

$$\frac{c_1}{\vartheta}+\frac{c_2}{\vartheta^2}+\dots+\frac{c_n}{\vartheta^n}\leqq x_\nu<\frac{c_1}{\vartheta}+\frac{c_2}{\vartheta^2}+\dots+\frac{c_n^*}{\vartheta^n},$$

wie aus (1) sofort ersichtlich ist. Für jede Sequenz c existiert also eine wohlbestimmte Wahrscheinlichkeit.

Da für fast alle $\alpha\in[0,1]$ das Verteilungsmaß der Folge $x_\nu(\alpha)$ gleich μ ist und μ von der Basis ϑ abhängt, ist auch $P(s_\nu=c)=P^{(\vartheta)}(s_\nu=c)$ eine Funktion von ϑ. Ist ϑ ganzzahlig, so gilt bekanntlich (s. [*1*]) für die eingliedrigen Sequenzen $s_\nu=\lambda_\nu$ die Beziehung

$$\begin{aligned}P(\lambda_{\nu+1}=c_1,\ \lambda_{\nu+2}=c_2,\dots,\lambda_{\nu+r}=c_r)\\ =P(\lambda_{\nu+1}=c_1,\dots,\lambda_{\nu+r-1}=c_{r-1})\,P(\lambda_{\nu+r}=c_r)\end{aligned}$$

für jede natürliche Zahl $r\geqq 2$. Die „Zufallsvariablen" $\lambda_{\nu+l}$ $(l=1,2,\dots,r)$ sind also für jedes $r\geqq 2$ voneinander unabhängig. Für die Basis $\vartheta=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ zeigte A. Rényi [*6*] die Relation

$$P(\lambda_{\nu+1}=c_1,\dots,\lambda_{\nu+r}=c_r)=P(\lambda_{\nu+1}=c_1,\dots,\lambda_{\nu+r-1}=c_{r-1})\,\pi(c_{r-1},c_r),$$

wobei $\pi(c_{r-1},c_r)$ nur von den beiden Argumenten abhängt. Die Zufallsvariablen $\lambda_{\nu+l}$ $(l=1,2,\dots,r)$ bilden also eine homogene Markowsche Kette mit den Übergangswahrscheinlichkeiten $\pi(c_i,c_j)$. Unser Ziel ist der folgende Satz, der zeigt, daß dieser Sachverhalt für eine ganze Klasse von Basen ϑ eintritt, die $\vartheta=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ als Spezialfall enthält.

Satz 3. *Es sei $\vartheta>1$ eine reelle Zahl, für die die ϑ-adische Entwicklung der Zahl 1 nach endlich vielen Schritten abbricht. Es sei also $1=\frac{a_1}{\vartheta}+\frac{a_2}{\vartheta^2}+\dots+\frac{a_{n+1}}{\vartheta^{n+1}}$. Dann bilden die Ziffernsequenzen $s_\nu=[\lambda_{\nu+1},\dots,\lambda_{\nu+n}]$ $(\nu=0,1,\dots)$ eine homogene Markowsche Kette. Mit anderen Worten: Sind $c_l=[c_{l_1}\dots c_{l_n}]$ $(l=1,\dots,r)$ feste n-gliedrige Sequenzen, dann existieren Übergangswahrscheinlichkeiten $\pi(c_i,c_j)$, so daß*

$$P(s_{\nu+1}=c_1,\dots,s_{\nu+r}=c_r)=P(s_{\nu+1}=c_1,\dots,s_{\nu+r-1}=c_{r-1})\,\pi(c_{r-1},c_r)$$

für jedes ganze $r\geqq 2$ gilt.

Bemerkung. Man überzeugt sich leicht davon, daß die positive Wurzel jeder Gleichung der Gestalt $x^2-mx-n=0$ $(1\leqq n\leqq m)$ die Voraussetzungen des Satzes erfüllt. Ebenso sieht man unmittelbar, daß es ganze algebraische

Zahlen beliebigen Grades gibt, die diese Eigenschaft besitzen (z.B. die Lösungen ϑ, $1<\vartheta<2$, der Gleichungen $x^n - x^{n-1} - 1 = 0$ für $n = 2, 3, \ldots$).

Es bedeute jetzt $L(\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_N)$ die Länge des Grundintervalles

$$\left[\frac{\lambda_1}{\vartheta} + \frac{\lambda_2}{\vartheta^2} + \cdots + \frac{\lambda_N}{\vartheta^N},\ \frac{\lambda_1}{\vartheta} + \cdots + \frac{\lambda_N^*}{\vartheta^N}\right).$$

Wir sagen auch kurz, $L(\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_N)$ sei die Intervallänge der Sequenz $[\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_N]$.

Mit diesen Bezeichnungen gilt der

HILFSSATZ. *Ist $t_\nu = 0$ für $\nu \geqq n+1$, so gilt für jede zulässige Sequenz $[\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_N]$ die Relation*

$$L(\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_N) = \vartheta^{n-N} \cdot L(\lambda_{N-n+1} \ldots \lambda_N) \qquad (N \geqq n).$$

BEWEIS. Wir wenden vollständige Induktion an. Für $N = n$ stimmt der Satz. Es sei also $N > n$ und die Behauptung für $N-1$ schon gezeigt. Dann gilt insbesondere

$$L(\lambda_2 \ldots \lambda_N) = \vartheta^{n-N+1} L(\lambda_{N-n+1} \ldots \lambda_N).$$

Es bleibt somit noch zu zeigen: $L(\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_N) = \frac{1}{\vartheta} L(\lambda_2 \ldots \lambda_N)$. Ist $\lambda_1 = 0, 1, \ldots, [\vartheta] - 1$, so ist diese Beziehung trivial, da alle Grundintervalle $\left[\frac{\lambda_1}{\vartheta}, \frac{\lambda_1 + 1}{\vartheta}\right)$ dieselbe Länge besitzen und für $\lambda_1 = 0$ die Behauptung offensichtlich stimmt. Es sei also $\lambda_1 = [\vartheta]$. Das Grundintervall, das durch die Sequenz $[\lambda_2 \ldots \lambda_N]$ bestimmt wird, sei $\left[\frac{\lambda_2}{\vartheta} + \cdots + \frac{\lambda_N}{\vartheta^{N-1}},\ \frac{\lambda_2}{\vartheta} + \cdots + \frac{\lambda_N^*}{\vartheta^{N-1}}\right)$. Dann ist $\frac{[\vartheta]}{\vartheta} + \frac{\lambda_2}{\vartheta^2} + \cdots + \frac{\lambda_N}{\vartheta^N} < 1$, da ja $[\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_N]$ zulässig sein sollte. (Man bestätigt leicht, daß eine Sequenz $[\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_N]$ genau dann zulässig ist, wenn $\frac{\lambda_1}{\vartheta} + \frac{\lambda_2}{\vartheta^2} + \cdots + \frac{\lambda_N}{\vartheta^N} < 1$ ist und die Sequenz $[\lambda_2 \ldots \lambda_N]$ zulässig ist.) Wir müssen nachweisen, daß auch $\frac{[\vartheta]}{\vartheta} + \frac{\lambda_2}{\vartheta^2} + \cdots + \frac{\lambda_N^*}{\vartheta^N} \leqq 1$ gilt. (Hier steht das Gleichheitszeichen, weil der rechte Endpunkt nicht mehr zulässig zu sein braucht.) Wäre das nicht der Fall, so würde $\frac{[\vartheta]}{\vartheta} + \frac{\lambda_2}{\vartheta^2} + \cdots + \frac{\lambda_N^*}{\vartheta^N} > 1$ gelten. Man käme also zu den Ungleichungen

$$(3) \qquad \frac{\lambda_2}{\vartheta} + \cdots + \frac{\lambda_N}{\vartheta^{N-1}} < \vartheta - [\vartheta] < \frac{\lambda_2}{\vartheta} + \cdots + \frac{\lambda_N^*}{\vartheta^{N-1}}.$$

Nun ist $\vartheta - [\vartheta]$ ein Endpunkt eines Grundintervalles n-ter Stufe. Da ein solcher aber eo ipso auch Endpunkt für jedes Grundintervall höherer Stufe ist, ergibt sich aus (3) ein Widerspruch, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

FOLGERUNG 1. Unter den Voraussetzungen des Hilfssatzes hängt die Länge $L(\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_N)$ nur von N und den letzten n Ziffern der Sequenz $[\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_N]$ ab.

FOLGERUNG 2. Unter denselben Voraussetzungen bilden die Intervallängen der Sequenzen $s_\nu = [\lambda_{\nu+1}, \ldots, \lambda_{\nu+n}]$ eine homogene Markowsche Kette,

d.h. es ist

$$L(s_{\nu+1}=c_1,\ldots,s_{\nu+r}=c_r)=L(s_{\nu+1}=c_1,\ldots,s_{\nu+r-1}=c_{r-1})\cdot l(c_{r-1},c_r),$$

wobei $l(c_{r-1},c_r)$ nur von den beiden Argumenten abhängt.

Beweis. Ergibt sich unmittelbar aus Folgerung 1 [2]).

Beweis von Satz 3. Sind die Voraussetzungen zu Satz 3 erfüllt (sie sind identisch mit denen des Hilfssatzes), so besteht die Verteilungsfunktion $\sigma(t)$ aus $n+1$ linearen Teilstücken mit den Endpunkten t_ν $(\nu=0,1,\ldots,n+1)$. Nun ist $t_\nu=\frac{a_{\nu+1}}{\vartheta}+\cdots+\frac{a_n+1}{\vartheta^{n-\nu+1}}$, d.h. jedes t_ν ist Endpunkt eines Grundintervalles n-ter Stufe. Daraus ergibt sich, daß $\sigma(t)$ innerhalb jedes Grundintervalles linear ist. Aus Folgerung 2 folgt nun unmittelbar die Behauptung von Satz 3 mit $\pi(c_i,c_j)=l(c_i,c_j)$. Denn die Übergangswahrscheinlichkeiten werden bei der Ersetzung der Längen durch die Wahrscheinlichkeiten nicht geändert wegen der Linearität von $\sigma(t)$. Eine Änderung tritt nur bei den Anfangswahrscheinlichkeiten ein, für die sich ergibt $P(s_\nu=c)=a(c)L(s_\nu=c)$, wo $a(c)$ eine Funktion der Sequenz c ist. Damit ist Satz 3 bewiesen.

Literatur

[1] Borel, É.: Sur les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques. Rend. Circ. Mat. Palermo **26**, 247—271 (1909).

[2] Cigler, J.: Der individuelle Ergodensatz in der Theorie der Gleichverteilung mod 1. Erscheint im J. reine u. angew. Math.

[3] Gelfond, A. O.: Über eine allgemeine Eigenschaft von Zahlsystemen. [Russisch.] Iswestija Akad. Nauk **23**, 809—814 (1959).

[4] Natanson, I. P.: Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen. Berlin 1954.

[5] Rényi, A.: Representations for Real Numbers and Their Ergodic Properties. Acta Math. Acad. Sci. Hung. **8**, 477—493 (1957).

[6] Rényi, A.: Über Algorithmen zur Darstellung reeller Zahlen. [Ungarisch.] MTA Mat. es Fiz. oszt. Közl. **7**, 265—293 (1957).

Mainz, Math. Institut der Universität

(Eingegangen am 26. März 1960)

[2]) Es ist natürlich z.B. $L(s_{\nu+1}=c_1,\ s_{\nu+2}=c_2)=0$ zu setzen, wenn das Argument sinnlos wird, wenn also $[c_{12}\ldots c_{1n}]\neq[c_{21}\ldots c_{2,n-1}]$ ist.

NÖBAUER, W.
Math. Zeitschr. 75, 14—21 (1961)

Über die Ableitungen der Vollideale

Von
WILFRIED NÖBAUER

In den Arbeiten [1], [2] wurde von mir der Begriff der ν-ten Ableitung eines Vollideales ($\nu = 0, 1, 2, 3, \ldots$) und der Begriff des D-Kernes eines Vollideales eingeführt und untersucht. Im folgenden sollen einerseits diese Untersuchungen fortgesetzt und wieder einige allgemeine Sätze über Ableitungen und D-Kerne von Vollidealen gewonnen werden, andererseits werden wir die D-Kerne der Restpolynomideale eines Galois-Feldes und der ganzzahligen Restpolynomideale berechnen. Aus Gründen der Zweckmäßigkeit werden wir für den D-Kern δV des Vollideales V im folgenden stets schreiben $\delta V = V^{(\infty)}$.

Es sei also $\mathfrak{r}$ ein kommutativer Ring mit Einheitselement und $R = \mathfrak{r}[x_1, x_2, \ldots, x_k] = \mathfrak{r}[\mathfrak{x}]$ der Polynomring über $\mathfrak{r}$ in den Unbestimmten $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Es sei ϑ ein Homomorphismus des Ringes $\mathfrak{r}$ auf den Ring $\mathfrak{t}$ und Θ die durch

$$\Theta \sum a_{\nu_1 \ldots \nu_k} x_1^{\nu_1} \ldots x_k^{\nu_k} = \sum (\vartheta a_{\nu_1 \ldots \nu_k}) x_1^{\nu_1} \ldots x_k^{\nu_k} \tag{1}$$

definierte Fortsetzung von ϑ zu einem Homomorphismus von R auf den Polynomring $T = \mathfrak{t}[\mathfrak{x}]$. Wir beweisen zunächst folgenden

SATZ 1. *Für jedes Vollideal $V \subseteq R$ und für $n = 0, 1, 2, \ldots, \infty$ gilt*

$$\Theta V^{(n)} \subseteq (\Theta V)^{(n)}. \tag{2}$$

BEWEIS. Für $n = 0$ ist (2) trivialerweise richtig. Ist $\varphi(\mathfrak{x}) \in \Theta V'$, so gilt $\varphi(\mathfrak{x}) = \Theta f(\mathfrak{x})$ mit $f(\mathfrak{x}) \in V'$. Es gilt also

$$f(\mathfrak{x}) \in V \qquad \frac{\partial}{\partial x_i} f(\mathfrak{x}) \in V \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Daraus folgt durch Anwendung von Θ:

$$\varphi(\mathfrak{x}) \in \Theta V \qquad \Theta \frac{\partial}{\partial x_i} f(\mathfrak{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \Theta f(\mathfrak{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(\mathfrak{x}) \in \Theta V,$$

also haben wir $\varphi(\mathfrak{x}) \in (\Theta V)'$ und damit $\Theta V' \subseteq (\Theta V)'$. Angenommen, es sei $\Theta V^{(n)} \subseteq (\Theta V)^{(n)}$ schon bewiesen, dann haben wir:

$$\Theta V^{(n+1)} = \Theta (V^{(n)})' \subseteq (\Theta V^{(n)})' \subseteq \left((\Theta V)^{(n)}\right)' = (\Theta V)^{(n+1)},$$

daher ist (2) für alle endlichen n richtig. Die Behauptung für $n = \infty$ ergibt sich so:

$$\Theta V^{(\infty)} = \Theta \left(\bigcap_n V^{(n)}\right) \subseteq \bigcap_n \Theta V^{(n)} \subseteq \bigcap_n (\Theta V)^{(n)} = (\Theta V)^{(\infty)}.$$

Folgerung. *Ist V ein D-Vollideal, dann auch ΘV.* Denn aus $V'=V$ folgt $\Theta V=\Theta V'\subseteq(\Theta V)'$, andererseits gilt aber auch die Beziehung $(\Theta V)'\subseteq\Theta V$.

Wir überlegen uns nun, daß in (2) das Gleichheitszeichen gilt, wenn das Umschließungsideal $\mathfrak{v}$ von V den Kern $\mathfrak{a}$ von ϑ enthält. Dazu beweisen wir, daß unter dieser Voraussetzung auch gilt

$$(\Theta V)^{(n)}\subseteq\Theta V^{(n)}. \tag{3}$$

Für $n=0$ ist das trivialerweise richtig. Ist $\varphi(\mathfrak{x})\in(\Theta V)'$, dann gilt $\varphi(\mathfrak{x})\in\Theta V$ und $\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(\mathfrak{x})\in\Theta V$, es gibt daher $f(\mathfrak{x})$, $g_i(\mathfrak{x})\in V$, so daß

$$\Theta f(\mathfrak{x})=\varphi(\mathfrak{x})\qquad \Theta g_i(\mathfrak{x})=\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(\mathfrak{x}).$$

Wegen $\Theta\frac{\partial}{\partial x_i}f(\mathfrak{x})=\frac{\partial}{\partial x_i}\Theta f(\mathfrak{x})=\Theta g_i(\mathfrak{x})$ haben wir

$$\Theta\left[\frac{\partial}{\partial x_i}f(\mathfrak{x})-g_i(\mathfrak{x})\right]=0,$$

also $\frac{\partial}{\partial x_i}f(\mathfrak{x})-g_i(\mathfrak{x})\in(\mathfrak{a})\subseteq(\mathfrak{v})\subseteq V$ und daher $\frac{\partial}{\partial x_i}f(\mathfrak{x})\in V$, also $f(\mathfrak{x})\in V'$ und damit $\varphi(\mathfrak{x})\in\Theta V'$, also $(\Theta V)'\subseteq\Theta V'$. Angenommen, es sei $(\Theta V)^{(n)}\subseteq\Theta V^{(n)}$ schon bewiesen; da $V^{(n)}$ dasselbe Umschließungsideal wie V hat, haben wir dann:

$$(\Theta V)^{(n+1)}=\left((\Theta V)^{(n)}\right)'\subseteq(\Theta V^{(n)})'\subseteq\Theta(V^{(n)})'=\Theta V^{(n+1)}.$$

Die Behauptung für $n=\infty$ ergibt sich jetzt so: Ist $\varphi(\mathfrak{x})\in(\Theta V)^{(\infty)}$, so gilt $\varphi(\mathfrak{x})\in(\Theta V)^{(n)}\subseteq\Theta V^{(n)}$ für jedes endliche n, es gibt daher Polynome $f_n(\mathfrak{x})\in V^{(n)}$ mit $\Theta f_n(\mathfrak{x})=\varphi(\mathfrak{x})$. Daher ist stets $\Theta\left(f_0(\mathfrak{x})-f_n(\mathfrak{x})\right)=0$, daher $f_0(\mathfrak{x})-f_n(\mathfrak{x})\in(\mathfrak{a})\subseteq(\mathfrak{v})\subseteq V^{(n)}$, also haben wir $f_0(\mathfrak{x})\in\bigcap_n V^{(n)}=V^{(\infty)}$ und daher $\varphi(\mathfrak{x})\in\Theta V^{(\infty)}$, also $(\Theta V)^{(\infty)}\subseteq\Theta V^{(\infty)}$.

Wir bezeichnen die Menge aller Urbilder einer Menge $M\subseteq T$ bei Θ mit ΛM. Wie in [1] gezeigt wurde, ist ΛM Vollideal in R, wenn M Vollideal in T ist. Wir haben nun

Satz 2. *Für jedes Vollideal $W\subseteq T$ und für $n=0, 1, 2, \ldots, \infty$ gilt*

$$(\Lambda W)^{(n)}=\Lambda W^{(n)}. \tag{4}$$

Denn es ist $\Theta(\Lambda W)=W$ und das Umschließungsideal von ΛW enthält $\mathfrak{a}$, daher haben wir

$$W^{(n)}=\Theta(\Lambda W)^{(n)},$$

woraus sich durch Anwendung von Λ unter Beachtung von $(\Lambda W)^{(n)}\supseteq(\mathfrak{a})$ tatsächlich (4) ergibt.

Wir definieren nun:

Unter der Ableitungslänge $l(V)$ des Vollideales V verstehen wir die kleinste nichtnegative Zahl n, für welche gilt:

$$V^{(n)}=V^{(\infty)}. \tag{5}$$

Falls ein solches n nicht existiert, setzen wir $l(V)=\infty$.

Offenbar ist $l(V)$ auch die kleinste nicht negative Zahl mit $V^{(n)}=V^{(n+1)}$. Die D-Vollideale lassen sich daher charakterisieren durch $l(V)=0$. Wegen $(A\cap B)^{(\nu)}=A^{(\nu)}\cap B^{(\nu)}$ gilt

$$l(A\cap B)\leqq \max\big(l(A),l(B)\big). \tag{6}$$

Aus (4) ergibt sich fast unmittelbar

$$l(\Lambda W)=l(W). \tag{7}$$

Satz 5 von [1] besagt, daß man genau sämtliche Vollideale von R mit dem Umschließungsideal $\mathfrak{a}$ erhält, wenn man $\mathfrak{t}=\mathfrak{r}|\mathfrak{a}$ setzt, für ϑ den natürlichen Homomorphismus von $\mathfrak{r}$ auf $\mathfrak{r}|\mathfrak{a}$ nimmt und dann in ΛW das W alle Vollideale von T mit dem Umschließungsideal (0) durchlaufen läßt.

Beachtet man nun noch (7), so erkennt man, daß auch gilt:

Man erhält genau alle D-Vollideale von R mit dem Umschließungsideal $\mathfrak{a}$, wenn man in ΛW das W alle D-Vollideale von T mit dem Umschließungsideal (0) durchlaufen läßt.

Weiter erkennt man: Wenn jedes Vollideal von T mit Umschließungsideal (0) endliche Ableitungslänge hat, dann hat jedes Vollideal von R mit dem Umschließungsideal $\mathfrak{a}$ endliche Ableitungslänge. Die Voraussetzung dieses Satzes ist nun sicher erfüllt in den folgenden beiden Fällen:

a) $\mathfrak{t}$ ist ein unendlicher Integritätsbereich,

b) $\mathfrak{t}$ hat endliche Charakteristik m.

Denn im Fall a) gilt für jedes Vollideal $W\leqq T$ mit Umschließungsideal (0) die Beziehung $\big((0)\big)\leqq W\leqq\{(0)\}=\big((0)\big)$ also $W=(0)$ und daher $W'=W$.

Im Fall b) wähle ich zunächst die natürliche Zahl σ so, daß gilt $m|\sigma!$ und bilde dann damit die Zahl $n=k(\sigma-1)+1$. Ist nun $f(\mathfrak{x})\in\mathfrak{t}[\mathfrak{x}]$ gegeben, so gilt für jede partielle Ableitung der Ordnung n von $f(\mathfrak{x})$

$$\frac{\partial^n}{\partial x_1^{\sigma_1}\partial x_2^{\sigma_2}\dots\partial x_k^{\sigma_k}} f(\mathfrak{x})=\sigma_1!\,\sigma_2!\dots\sigma_k!\,g(\mathfrak{x})=0,$$

denn es gilt mindestens einmal $\sigma_i\geqq\sigma$. Nun ist aber, wie wir in [1] festgestellt haben, $W^{(n)}$ die Menge aller Elemente von W, für die sämtliche partiellen Ableitungen von einer Ordnung $\leqq n$ zu W gehören; deshalb gilt in unserem Fall für jedes Vollideal $W\leqq T$ die Beziehung $W^{(n-1)}\leqq W^{(n)}$, also $l(W)\leqq n-1$.

Wir haben daher den folgenden

SATZ 3. *Wenn jedes homomorphe Bild des Ringes $\mathfrak{r}$ ein Integritätsbereich ist oder endliche Charakteristik hat, dann hat jedes Vollideal von $\mathfrak{r}[\mathfrak{x}]$ endliche Ableitungslänge.*

Insbesondere haben also alle Vollideale über einen endlichen Ring $\mathfrak{r}$ und alle Vollideale über den Integritätsbereich $\mathfrak{g}$ der ganzen rationalen Zahlen endliche Ableitungslänge.

Wir wenden uns nun der am Beginn der Arbeit angekündigten Berechnung von D-Kernen zu:

Zunächst sei $\mathfrak{r}$ das Galois-Feld mit $r=p^e$ Elementen. Dann gibt es in $R=\mathfrak{r}[\mathfrak{x}]$ nur die beiden Restpolynomideale $\{(1)\}=R$ und $\{(0)\}$. Wegen $R'=R$ brauchen wir also nur noch $\{(0)\}=N$ zu betrachten. Aus bekannten Sätzen über Galois-Felder ergibt sich

$$N=(x_1^r-x_1,\ x_2^r-x_2 \dots x_k^r-x_k). \tag{8}$$

Wir bilden nun das Ideal

$$P=\left((x_1^r-x_1)^p,\ (x_2^r-x_2)^p \dots (x_k^r-x_k)^p\right),$$

und behaupten, daß gilt

$$N^{(m)}=(N^{m+1},\ P) \quad \text{für jedes endliche } m. \tag{9}$$

Den Beweis führen wir durch Induktion. Für $m=0$ ist (9) wegen $P\subseteqq N$ richtig. Wir nehmen daher an, (9) sei mit $m-1$ statt m schon bewiesen. Wie wir schon in [1] gezeigt haben, gilt für ein Vollideal V stets $V^n\subseteqq V^{(n-1)}$, also haben wir $N^{m+1}\subseteqq N^{(m)}$; da sämtliche partiellen Ableitungen von $(x_i^r-x_i)^p$ verschwinden, gilt auch $P\subseteqq N^{(m)}$, also $(N^{m+1},\ P)\subseteqq N^{(m)}$. Nun sei umgekehrt $f(\mathfrak{x})\in N^{(m)}$ gegeben. Wegen $N^{(m)}\subseteqq N^{(m-1)}$ und der Induktionsannahme können wir schreiben:

$$f(\mathfrak{x})=\sum a_{e_1 e_2 \dots e_k}(\mathfrak{x})\,(x_1^r-x_1)^{e_1}(x_2^r-x_2)^{e_2}\dots(x_k^r-x_k)^{e_k}+\sum_{i=1}^{k} b_i(\mathfrak{x})\,(x_i^r-x^i)^p, \tag{10}$$

wobei die erste Summe zu erstrecken ist über alle geordneten k-Tupel

$$\{e_1,\ e_2,\ \dots,\ e_k\}$$

mit $\qquad e_1+e_2+\dots+e_k=m \qquad 0\leqq e_i<p \qquad$ für $\qquad i=1,2,\dots,k.$

Aus (10) erhält man durch Differentiation unter Beachtung von $N^m\subseteqq N^{(m-1)}$

$$\frac{\partial^m}{\partial x_1^{e_1}\partial x_2^{e_2}\dots\partial x_k^{e_k}} f(\mathfrak{x})\equiv(-1)^m e_1!\,e_2!\dots e_k!\,a_{e_1 e_2\dots e_k}(\mathfrak{x}) \mod N$$

wegen $f(\mathfrak{x})\in N^{(m)}$ gilt also stets $a_{e_1 e_2\dots e_k}(\mathfrak{x})\in N$, woraus sich wegen (10) sogleich ergibt $f(\mathfrak{x})\in(N^{m+1},\ P)$. Es gilt also tatsächlich auch $N^{(m)}\subseteqq(N^{m+1},\ P)$ und damit (9).

Nun haben wir aber $N^{k(p-1)+1}\subseteqq P$, wegen (9) gilt also $N^{(k(p-1))}=P$, daher $N^{(k(p-1)+1)}=N^{(k(p-1))}$, also gilt $N^{(\infty)}=P$. Andererseits haben wir für das Polynom

$$g(\mathfrak{x})=\prod_{i=1}^{k}(x_i^r-x_i)^{p-1}$$

sowohl

$$g(\mathfrak{x})\in N^{k(p-1)}\subseteqq N^{(k(p-1)-1)}$$

als auch

$$\frac{\partial^{k(p-1)}}{\partial x_1^{p-1}\partial x_2^{p-1}\dots\partial x_k^{p-1}} g(\mathfrak{x})\notin N$$

und damit $g(\mathfrak{x}) \notin N^{(k(p-1))}$, also $N^{(k(p-1)-1)} \supset N^{(k(p-1))}$, wir haben also $l(N) = k(p-1)$.

Nun sei $\mathfrak{r} = \mathfrak{g}$, der Integritätsbereich der ganzen rationalen Zahlen. Wir wollen für die Restpolynomideale $\{(n)\} \subseteq \mathfrak{g}[\mathfrak{x}] = R$ die Ideale $\{(n)\}^{(\infty)}$ berechnen. Da $\{(0)\} = (0)$ und $\{(1)\} = R$ ersichtlich D-Vollideale sind, können wir annehmen, daß $n > 1$ ist. Es sei

$$n = \prod_{\nu=1}^{t} p_\nu^{e_\nu}$$

die Primfaktorzerlegung von n. Da für paarweise teilerfremde Ideale Produkt und Durchschnitt übereinstimmen, haben wir

$$(n) = \prod_{\nu=1}^{t} (p_\nu^{e_\nu}) = \bigcap_{\nu=1}^{t} (p_\nu^{e_\nu})$$

daraus folgt wegen $\{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}\} = \{\mathfrak{a}\} \cap \{\mathfrak{b}\}$

$$\{(n)\} = \bigcap_{\nu=1}^{t} \{(p_\nu^{e_\nu})\} \tag{11}$$

nach [1] und [2] daher für $\sigma = 0, 1, 2, \ldots, \infty$

$$\{(n)\}^{(\sigma)} = \bigcap_{\nu=1}^{t} \{(p_\nu^{e_\nu})\}^{(\sigma)}, \tag{12}$$

wobei stets $(p_\nu^{e_\nu}) \subseteq \{(p_\nu^{e_\nu})\}^{(\sigma)}$, so daß die Glieder der rechten Seite von (12) paarweise teilerfremd sind. Daraus ergibt sich insbesondere

$$\{(n)\}^{(\infty)} = \prod_{\nu=1}^{t} \{(p_\nu^{e_\nu})\}^{(\infty)}. \tag{13}$$

Wir können uns daher von jetzt ab auf den Fall $n = p^e$ (p Primzahl, $e \geqq 1$) beschränken.

Zunächst betrachten wir den Fall $k = 1$, also den Polynomring $\mathfrak{g}[x]$. Wir verwenden folgenden Satz von STRAUS [3]:

Dann und nur dann nehmen die Ableitungen jeder Ordnung $t \geqq 0$ eines Polynomes $f(x)$ über den Körper der rationalen Zahlen für alle ganzen Zahlen wieder ganze Zahlen als Werte an, wenn gilt:

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu \frac{\prod_p p^{[\nu/p]}}{\nu!} r_\nu(x) \tag{14}$$

mit ganzen Koeffizienten c_ν und beliebigem n.

Die $r_\nu(x)$ sind dabei, wie in früheren Arbeiten, definiert durch

$$r_0(x) = 1 \qquad r_\nu(x) = x(x-1)\ldots(x-\nu+1) \quad \text{für} \quad \nu > 0. \tag{15}$$

Bezeichnen wir die Menge aller rationalzahligen Polynome mit der in diesem Satz betrachteten Eigenschaft mit $\mathfrak{G}$, so ist $g(x) \in \{(p^e)\}^{(\infty)}$ offensichtlich

gleichbedeutend mit den beiden folgenden Bedingungen:

$$g(x) \in \mathfrak{g}[x] \qquad \frac{g(x)}{p^e} \in \mathfrak{G}. \tag{16}$$

Wir haben also dann und nur dann $g(x) \in \{(p^e)\}^{(\infty)}$, wenn man schreiben kann

$$g(x) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu p^e \frac{\prod_p p^{[\nu/p]}}{\nu!} r_\nu(x)$$

mit ganzzahligen

$$a_\nu = c_\nu p^e \frac{\prod_p p^{[\nu/p]}}{\nu!}. \tag{17}$$

Jedes ganzzahlige a_ν der Gestalt (17) ist — wenn $\varepsilon(\nu)$ den Exponenten der in $\nu!$ enthaltenen Potenz von p bezeichnet und Potenzen mit negativem Exponenten 1 gesetzt werden — teilbar durch $p^{e+\left[\frac{\nu}{p}\right]-\varepsilon(\nu)}$, andererseits aber wird jede dadurch teilbare Zahl bei geeigneter Wahl eines ganzen c_ν in (17) als a_ν erhalten.

Wir können daher zunächst einmal sagen: $\{(p^e)\}^{(\infty)}$ ist die Menge aller Polynome

$$u(x) = \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu p^{e+\left[\frac{\nu}{p}\right]-\varepsilon(\nu)} r_\nu(x) \tag{18}$$

mit ganzzahligen Koeffizienten b_ν.

Nun ist aber bekanntlich

$$\varepsilon(\nu) = \left[\frac{\nu}{p}\right] + \left[\frac{\nu}{p^2}\right] + \left[\frac{\nu}{p^3}\right] + \cdots,$$

daher

$$\varepsilon\left(\left[\frac{\nu}{p}\right]\right) = \left[\frac{1}{p}\left[\frac{\nu}{p}\right]\right] + \left[\frac{1}{p^2}\left[\frac{\nu}{p}\right]\right] + \left[\frac{1}{p^3}\left[\frac{\nu}{p}\right]\right] + \cdots.$$

Ist $\nu = \sum_{i=0}^{m} a_i p^i$ die p-adische Zifferndarstellung von ν, so haben wir:

$$\left[\frac{1}{p^{r-1}}\left[\frac{\nu}{p}\right]\right] = \left[\frac{1}{p^{r-1}} \sum_{i=1}^{m} a_i p^{i-1}\right] = \sum_{i=r}^{m} a_i p^{i-r} = \left[\frac{\nu}{p^r}\right]$$

daher gilt

$$\varepsilon\left(\left[\frac{\nu}{p}\right]\right) = \left[\frac{\nu}{p^2}\right] + \left[\frac{\nu}{p^3}\right] + \cdots = \varepsilon(\nu) - \left[\frac{\nu}{p}\right].$$

Setzen wir das in (18) ein, erhalten wir:

$\{(p^e)\}^{(\infty)}$ ist die Menge aller mit ganzen Zahlen b_ν gebildeten Polynome:

$$u(x) = \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu p^{e-\varepsilon\left(\left[\frac{\nu}{p}\right]\right)} r_\nu(x). \tag{19}$$

Dieses letzte Resultat ermöglicht es nun, eine Idealbasis für $\{(p^e)\}^{(\infty)}$ anzugeben. Ist nämlich s die größte nichtnegative ganze Zahl, für welche

gilt $\varepsilon(sp)<e$, so haben wir, wie man ohne Mühe erkennt:

$$\{(p^e)\}^{(\infty)} = \left(p^e r_0(x),\ p^{e-\varepsilon(p)} r_{p^2}(x),\ p^{e-\varepsilon(2p)} r_{2p^2}(x) \dots p^{e-\varepsilon(sp)} r_{sp^2}(x), r_{(s+1)p^2}(x)\right).$$

Den Fall von mehreren Unbestimmten behandeln wir nun mit vollständiger Induktion nach der Anzahl k der Unbestimmten. Unsere Behauptung lautet:

Ist $R=\mathfrak{g}[x_1, x_2, \dots, x_k]$, *so ist* $\{(p^e)\}^{(\infty)}$ *die Menge aller Polynome*

$$u(\mathfrak{x}) = \sum_{i_\nu=0}^{n_\nu} b_{i_1 i_2 \dots i_k} p^{e-\sum_{\nu=1}^{k} \varepsilon\left(\left[\frac{i_\nu}{p}\right]\right)} r_{i_1}(x_1) r_{i_2}(x_2) \dots r_{i_k}(x_k) \tag{20}$$

mit ganzzahligen Koeffizienten $b_{i_1 i_2 \dots i_k}$.

BEWEIS. Für $k=1$ geht (20) über in (19), die Behauptung ist in diesem Fall daher richtig. Wir nehmen also an, sie sei für $k-1$ Unbestimmte schon bewiesen.

Es sei nun $u(\mathfrak{x}) \in \{(p^e)\}^{(\infty)}$. Wir setzen zur Abkürzung $\mathfrak{x}_{k-1}=(x_1, x_2, \dots, x_{k-1})$ und können dann schreiben:

$$u(\mathfrak{x}) = u(\mathfrak{x}_{k-1}, x_k) = \sum_{i_k=0}^{n_k} g_{i_k}(\mathfrak{x}_{k-1}) r_{i_k}(x_k). \tag{21}$$

Sämtliche partiellen Ableitungen beliebiger Ordnung von $u(\mathfrak{x})$ gehören zu $\{(p^e)\}$, daher gehören auch sämtliche partiellen Ableitungen von

$$\frac{\partial^\sigma}{\partial x_1^{\sigma_1} \partial x_2^{\sigma_2} \dots \partial x_{k-1}^{\sigma_{k-1}}} u(\mathfrak{x}) = \sum_{i_k=0}^{n_k} \frac{\partial^\sigma}{\partial x_1^{\sigma_1} \partial x_2^{\sigma_2} \dots \partial x_{k-1}^{\sigma_{k-1}}} g_{i_k}(\mathfrak{x}_{k-1}) r_{i_k}(x_k)$$

zu $\{(p^e)\}$, insbesondere also auch alle Ableitungen nach x_k. Es ist daher für beliebiges $\mu \geqq 0$ und für ein beliebiges $(k-1)$-Tupel $\mathfrak{k}$ von ganzen Zahlen stets

$$H_{\mu,\mathfrak{k}}(x_k) = \sum_{i_k=0}^{n_k} \frac{\partial^\sigma}{\partial x_1^{\sigma_1} \partial x_2^{\sigma_2} \dots \partial x_{k-1}^{\sigma_{k-1}}} g_{i_k}(\mathfrak{k}) r_{i_k}^{(\mu)}(x_k) \in \{(p^e)\}.$$

Daher gehört das Polynom $H_{0,\mathfrak{k}}(x_k)$ zu $\{(p^e)\}^{(\infty)}$ von $\mathfrak{g}[x_k]$; durch Berücksichtigung von (19) mit x_k statt x erhalten wir — wenn wir beachten, daß die Darstellung eines ganzzahligen Polynomes $u(x)$ in der Form $u(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i r_i(x)$ eindeutig ist —

$$\frac{\partial^\sigma}{\partial x_1^{\sigma_1} \partial x_2^{\sigma_2} \dots \partial x_{k-1}^{\sigma_{k-1}}} g_{i_k}(\mathfrak{k}) \equiv 0 \bmod p^{e-\varepsilon\left(\left[\frac{i_k}{p}\right]\right)}$$

und zwar gilt dies für jedes $\mathfrak{k}$, so daß wir also haben

$$\frac{\partial^\sigma}{\partial x_1^{\sigma_1} \partial x_2^{\sigma_2} \dots \partial x_{k-1}^{\sigma_{k-1}}} g_{i_k}(\mathfrak{x}_{k-1}) \in \left\{\left(p^{e-\varepsilon\left(\left[\frac{i_k}{p}\right]\right)}\right)\right\}$$

und damit

$$g_{i_k}(\mathfrak{x}_{k-1}) \in \left\{\left(p^{e-\varepsilon\left(\left[\frac{i_k}{p}\right]\right)}\right)\right\}^{(\infty)} \subseteqq \mathfrak{g}[\mathfrak{x}_{k-1}].$$

Nach Induktionsannahme haben wir daher

$$g_{i_k}(x_{k-1}) = \sum_{i_\nu=0}^{n_\nu} b_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} i_k} p^{e-\varepsilon\left(\left[\frac{i_k}{p}\right]\right) - \sum_{\nu=1}^{k-1} \varepsilon\left(\left[\frac{i_\nu}{p}\right]\right)} r_{i_1}(x_1) \dots r_{i_{k-1}}(x_{k-1}).$$

Daraus folgt durch Einsetzen in (21) sogleich

$$u(\mathfrak{x}) = \sum_{i_\nu=0}^{n_\nu} b_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} i_k} p^{e-\sum_{\nu=1}^{k} \varepsilon\left(\left[\frac{i_\nu}{p}\right]\right)} r_{i_1}(x_1) \dots r_{i_{k-1}}(x_{k-1}) r_{i_k}(x_k).$$

Die Polynome (20) enthalten also alle Polynome von $\{(p^e)\}^{(\infty)}$.

Umgekehrt gehört tatsächlich jedes Polynom (20) zu $\{(p^e)\}^{(\infty)}$: Denn $r_{i_\nu}(x_\nu) = p^{\varepsilon\left(\left[\frac{i_\nu}{p}\right]\right) - \varepsilon\left(\left[\frac{i_\nu}{p}\right]\right)} r_{i_\nu}(x_\nu)$ gehört wegen (19) zum Ideal $\left\{\left(p^{\varepsilon\left(\left[\frac{i_\nu}{p}\right]\right)}\right)\right\}^{(\infty)}$. Es gilt deshalb

$$r_{i_1}(x_1) r_{i_2}(x_2) \dots r_{i_k}(x_k) \in \left\{\left(p^{\sum_{\nu=1}^{k} \varepsilon\left(\left[\frac{i_\nu}{p}\right]\right)}\right)\right\}^{(\infty)},$$

also gilt für jedes Polynom der Gestalt (20) wirklich $u(\mathfrak{x}) \in \{(p^e)\}^{(\infty)}$.

Literatur

[1] Nöbauer, W.: Zur Theorie der Vollideale. Monatsh. Math. **64**, 176–183 (1960).
[2] Nöbauer, W.: Zur Theorie der Vollideale II. Monatsh. Math. **64**, 335–348 (1960).
[3] Straus, E. G.: On the polynomials whose derivatives have integral values at the integers. Proc. Amer. Math. Soc. **2**, 24–27 (1951).

Mathematisches Institut der Universität Wien

(Eingegangen am 8. April 1960)

Baumslag, G.
Math. Zeitschr. 75, 22—28 (1961)

Wreath products and finitely presented groups

By
Gilbert Baumslag*)

§1. The wreath product and its variations has become an increasingly valuable tool in the construction and investigation of both finite and infinite groups. In particular Krasner and Kaloujnine [5] have found that the sylow p-subgroup of the symmetric group of degree p^n is simply an "iterated" wreath product of n cyclic groups of order p, P. Hall [4] has utilised the "anti-symmetric" properties of wreath products in his investigations of infinite soluble groups, B. H. Neumann and Hanna Neumann [6] have constructed finitely generated soluble groups which are isomorphic to one of their proper factor groups, yielding a more complete negation of the so called Hopf problem originally solved by B. H. Neumann [7], and Baumslag [1], [2], [3] has used variations of the wreath product to investigate properties of groups with roots.

The (ordinary) wreath product W of two groups A and B may be defined in the following way: Let A_b denote an isomorphic copy of A indexed by $b \in B$ — thus $a_b \in A_b$ corresponds to $a \in A$. Let K be the (restricted) direct product of the groups A_b:

$$K = \prod_{b \in B} A_b .$$

Then each element $b^* \in B$ induces an automorphism $\hat{b}^*$ of K by defining

$$(a_b)^{\hat{b}^*} = (a_{bb^*}) .$$

Furthermore the mapping

$$b^* \to \hat{b}^*$$

is an isomorphism between B and a group $\hat{B}$ of automorphisms of K. Consequently we can form the "splitting extension" W of K by B. Explicitly W is to consist of all formal pairs bk ($b \in B$, $k \in K$) with multiplication defined by

$$b_1 k_1 \cdot b_2 k_2 = b_1 b_2 k_1^{\hat{b}_2} k_2 \quad (b_1, b_2 \in B,\ k_1, k_2 \in K) .$$

We shall identify B and $\hat{B}$: thus $k_1^{b_2}$ coincides with the transform $b_2^{-1} k_1 b_2$ of k_1 by b_2. The group W constructed in this way is called the *wreath product of A by B*.

Suppose now that we call a group finitely presented if it can be defined in terms of a finite number of generators and a finite number of relations

*) This work was supported in part by National Science Foundation Grant G-9665.

in these generators. We ask when the wreath product of finitely presented groups is finitely presented. It is easy to see that the wreath product of two finitely generated groups is finitely generated. Thus the problem at hand is one involving the number of relations of a group. Such problems are sometimes deceptively difficult.

We prove in this note that if A and B are finitely presented groups, then the wreath product of A by B is finitely presented if and only if $A=1$ or B is finite. The proof makes use of the free product with an amalgamated subgroup.

Let us call a group "recursively presented" if it requires only a finite number of generators and a recursive set of defining relations in these generators for its definition. Then an immediate consequence of the above theorem is the existence of a recursive class of recursively presented groups, each group in the class being generated by 3 elements, such that there is no effective procedure to determine whether any group in the class is finitely presented.

§2. I shall prove the following theorem in this section.

THEOREM 1. *Let A and B be finitely presented groups. Then the wreath product W of A by B is a finitely presented group if and only if either $A=1$ or B is finite.*

The one part of the theorem is immediate.

The proof that W is infinitely related if $A\neq 1$ and B is infinite will be achieved by considering a suitable homomorphic image W° of W. This group W° will be constructed in accordance with the following constructive procedure.

Except for the supposition that B is infinite, suppose for the moment that A and B are arbitrary groups and that S is a non-empty subset of B. Let T be that subset of the cartesian product of B with itself defined by:

$$T=\{(s_1 b, s_2 b):\ s_1, s_2\in S,\ b\in B\}.$$

Clearly T is an equivalence relation on B; in particular, if $(u, v)\in T$ then $(v, u)\in T$. In addition if $(u, v)\in T$ then $(ub, vb)\in T$ for any $b\in B$.

Let A_b denote an isomorphic copy of A indexed by the element $b\in B$. We shall construct a group G containing the groups A_b and the group B as subgroups and generated by them. This group G depends on A, B and S and we will denote it by

$$G=\{A.B;\ S\}.$$

We define G by transfinite induction. First we well order the elements of B by means of a well-ordered index set $\mathscr{A}$ which has no last element — since B is infinite this is always possible —

$$1=b(0),\ b(1),\ldots,b(\alpha),\ldots \qquad (\alpha\in\mathscr{A});$$

then we define

$$G_1=A_{b(0)}.$$

Suppose now that G_α has been defined for every $\alpha<\beta$ $(\alpha, \beta \in \mathscr{A})$ in such a way that

(i) G_α contains the groups $A_{b(\alpha')}$ for every $\alpha'<\alpha$;

(ii) G_α is generated by the groups $A_{b(\alpha')}$ $(\alpha'<\alpha)$.

Then if β does not have a predecessor we put

$$G_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} G_\alpha.$$

If β does have a predecessor, say $\beta-1$, we proceed somewhat differently. We take $P_{\beta-1}$ to be the partners of $b(\beta-1)$ in T, which properly precede $b(\beta-1)$ in the well-order of B; more precisely,

$$P_{\beta-1} = \{b(\alpha):\ \alpha<\beta-1,\ (b(\alpha), b(\beta-1)) \in T\}.$$

We observe that the groups $A_{b(\alpha)}$ $(\alpha<\beta-1)$ are subgroups of $G_{\beta-1}$ and so we may define, without ambiguity, $H_{\beta-1}$ to be that subgroup of $G_{\beta-1}$ which is generated by the groups $A_{b(\alpha)}$ with $b(\alpha) \in P_{\beta-1}$:

$$H_{\beta-1} = g\,p\left(A_{b(\alpha)};\ b(\alpha) \in P_{\beta-1}\right).$$

We now form the direct product $J_{\beta-1}$ of $H_{\beta-1}$ and $A_{b(\beta-1)}$:

$$J_{\beta-1} = H_{\beta-1} \times A_{b(\beta-1)}.$$

Next we form the free product G_β of $G_{\beta-1}$ and $J_{\beta-1}$ amalgamating their common subgroup $H_{\beta-1}$:

$$G_\beta = \{G_{\beta-1} * J_{\beta-1};\ H_{\beta-1}\}.$$

Then it is clear that G_β satisfies the inductive assumptions (i) and (ii) and so we are entitled to complete the definition of the groups G_α for every $\alpha \in \mathscr{A}$. Finally we put

$$G = \{A.B;\ S\} = \bigcup_{\alpha \in \mathscr{A}} G_\alpha.$$

We observe that as $\mathscr{A}$ has no last element every element $\alpha \in \mathscr{A}$ has a successor $\alpha+1$, say, in $\mathscr{A}$. Thus G contains every group $A_{b(\alpha)}$ as a subgroup, since $G_{\alpha+1}$ contains $A_{b(\alpha)}$.

The following lemmas will be of use to us in the sequel. We assume the notation and conditions of the previous paragraphs.

LEMMA 1. *Let* $G=\{A.B;\ S\}$. *Then*

$$[A_b, A_c] = 1$$

if, and only if,

$$(b, c) \in T.$$

PROOF. Let us suppose firstly that $(b, c) \in T$. If $b=c$ the result is immediate. If $b \neq c$ we may suppose

$$b = b(\alpha), \qquad c = b(\beta)$$

and that

$$\alpha<\beta.$$

Then it follows immediately from the definition of $G_{\beta+1}$, which contains $A_{b(\alpha)}$ and $A_{b(\beta)}$, that

$$[A_{b(\alpha)}, A_{b(\beta)}] = 1$$

as required.

For the reverse part of the proof assume that

$$[A_b, A_c] = 1.$$

If $b=c$, then

$$(b, c) \in T$$

since T is an equivalence relation on B. If $b \neq c$ then, as before, we may assume

$$b = b(\alpha), \qquad c = b(\beta) \quad \text{and} \quad \alpha < \beta.$$

Then $G_{\beta+1}$ is defined as follows:

$$G_{\beta+1} = \{G_\beta * J_\beta; H_\beta\}.$$

Now

$$J_\beta = H_\beta \times A_{b(\beta)}$$

and since

$$(b(\alpha), b(\beta)) \notin T$$

it follows that $A_{b(\alpha)}$ intersects J_β trivially. Consequently, since $G_{\beta+1}$ is the free product with an amalgamated subgroup, we have

$$[A_{b(\alpha)}, A_{b(\beta)}] \neq 1$$

and this completes the proof of the lemma.

We show next that $G=\{A.B; S\}$ has a group of automorphisms $\hat{B}$ which is isomorphic to B.

LEMMA 2. *Let $G=\{A.B; S\}$ and let $c \in B$. Then the mapping*

$$a_b \to a_{bc} \qquad (b \in B)$$

can be extended to an automorphism $\hat{c}$, say, of G.

PROOF. If $g = \pi a_b$ is a product of elements a_b, then we define

$$g^{\hat{c}} = \pi a_{bc}.$$

We show first that $\hat{c}$ defines an endomorphism of G. To do this we have to show that the elements a_{bc} satisfy the same relations as the elements a_b. But this is an immediate consequence of Lemma 1, since by the construction of G, the only relations satisfied by the elements a_b, besides those relations which stem from the defining relations of A, are the relations

$$[a_b, a_{b'}] = 1 \qquad (b' \in B).$$

It is left only, therefore, to verify that the endomorphism $\hat{c}$ is one-to-one. This follows, once again, from the construction of G and Lemma 1.

Now it follows easily from Lemma 2 that the mapping

$$b \to \hat{b} \qquad (b \in B)$$

defines an isomorphism from B onto a group $\hat{B}$ of automorphisms of G. We identify B with $\hat{B}$ and form a splitting extension W° of G by B:

$$W^\circ = gp(G, B; b_1^{-1} a_b b_1 = a_{b b_1}) = \{A \circ B; S\}.$$

We shall call W° the *circle product of A by B via S*. The circle product is a generalization of the wreath product — it degenerates into the wreath product if T coincides with $B \times B$ and so if $S = B$, W° is simply the wreath product of A by B.

Once again we assume the notation developed thus far; in particular we maintain the assumption that B is infinite. The following lemma is critical in the proof of the theorem.

LEMMA 3. *Let $W^\circ = \{A \circ B; S\}$. If S is finite then there exists $c \in B$ such that*

$$[A_1, A_c] \neq 1.$$

PROOF. Let

$$S^+ = \{s t^{-1} : s, t \in S\}.$$

Then S^+ is finite since S is finite. Therefore we can choose $c \in B$ in such a way that $c \notin S^+$. Then we assert that

$$(1, c) \notin T. \tag{1}$$

To see this we observe that the elements of T are all of the form

$$(sb, tb) \qquad (s, t \in S,\ b \in B).$$

Thus if

$$(1, c) = (sb, tb)$$

we have $sb = 1$ and hence $b = s^{-1}$. Therefore

$$c = t s^{-1} \in S^+$$

which contradicts the choice of c at the outset. So the assertion (1) is verified. Now we apply Lemma 1 to deduce that

$$[A_1, A_c] \neq 1$$

and this completes the proof of the lemma.

We come now to the proof of Theorem 1.

PROOF OF THEOREM 1. Suppose

$$A_1 = gp(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(h)};\ r_1 = 1,\ r_2 = 1, \ldots, r_i = 1)$$

and that

$$B = gp(b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots, b^{(j)};\ s_1 = 1,\ s_2 = 1, \ldots, s_k = 1).$$

It is easy to see then that W, the wreath product of A by B, can be defined by

$$W = g\,p\,(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(h)},\ b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots, b^{(j)};\ R_1 \cup R_2),$$

where

(1) $$R_1 = \{r_1 = 1,\ r_2 = 1, \ldots, r_i = 1,\ s_1 = 1,\ s_2 = 1, \ldots, s_k = 1\}$$

and

(2) $$R_2 = \{[b^{-1} a^{(n)} b,\ a^{(n)}] = 1^{1}),\ b \in B,\ n = 1, 2, \ldots, h\};$$

in order that the relations R_2 be written in terms of the given generators $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(h)}, b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots, b^{(j)}$ of W, we may suppose that the elements b appearing in the defining relations R_2 have already been so expressed.

Now by a well-known theorem of B. H. Neumann [8] if a finitely generated group is finitely related then it can be finitely defined in terms of any given finite set of generators. Thus in our case if W requires only a finite number of defining relations, then some finite subset R of $R_1 \cup R_2$ will suffice to define W. Suppose then that W actually coincides with

$$W^- = g\,p\,(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(h)},\ b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots, b^{(j)};\ R),$$

with R finite. In this event we may adjoin to the defining relations R of W^- the relations R_1. Since W and W^- coincide this means that

$$W^- = g\,p\,(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(h)},\ b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots, b^{(j)};\ R \cup R_1).$$

Consider now

$$(R \cup R_1) \cap R_2.$$

If this set is empty we put W° equal to the free product of A_1 and B:

$$W^\circ = A_1 * B;$$

if it is non-empty then it is a finite subset of R_2, say

$$\{[b_1^{-1} a^{n(1)} b_1, a^{n(1)}] = 1, \ldots, [b_m^{-1} a^{n(m)} b_1, a^{n(m)}] = 1\}.$$

Put

$$S = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$$

and form

$$W^\circ = \{A \circ B;\ S\}.$$

Since every relation satisfied in W^- is also satisfied in W° it follows that W° is a homomorphic image of W^-. By Lemma 3, there exists $c \in B$ such that A_1 and A_1^c, qua subgroups of W°, do not commute. It follows then that W^- and W cannot be the same group. For if this were the case, then A_1 and A_1^c, qua subgroups of W^- commute. This is not the case however since $[A_1, A_1^c] \neq 1$ in W°. This completes the proof of the theorem as this contradicts our assumption that $W = W^-$.

---

[1]) We adopt here the convention that $[x, y] = x^{-1} y^{-1} x\, y$.

As a corollary of Theorem 1, we have the following unsolvability result, which is probably well known.

COROLLARY. *It is effectively undecidable whether any group in any recursive class of finitely generated recursively presented groups can be finitely presented.*

PROOF. Let Z be the infinite cyclic group and let $\mathscr{G}$ be the class of finitely presented groups (see RABIN [9]). Then the class of groups

$$\hat{\mathscr{G}} = \{G \operatorname{Wr} Z;\ G \in \mathscr{G}\}$$

where $G \operatorname{Wr} Z$ denotes the wreath product of G by Z, clearly constitutes a recursive class of finitely generated recursively presented groups. But by Theorem 1,

$$\hat{G} = G \operatorname{Wr} Z \in \hat{\mathscr{G}}$$

is finitely presented if, and only if, $G = 1$. Thus if one can decide effectively for $\hat{\mathscr{G}}$ whether any of its members is finitely presented, then one can decide effectively whether any finitely presented group is trivial. But by a theorem of RABIN [9] this is not possible and so the corollary follows.

We remark that this corollary can be strengthened by making use of the well-known techniques introduced by HIGMAN, NEUMANN, B. H. and HANNA NEUMANN [10]; thus we could even restrict our class of groups to groups involving at most 3 generators.

Reference

[1] BAUMSLAG, GILBERT: Some aspects of groups with unique roots. To appear in Acta Math. (Stockh.).

[2] BAUMSLAG, GILBERT: Wreath products and p-groups. Proc. Cambridge Phil. Soc. **55**, 224—231 (1959).

[3] BAUMSLAG, GILBERT: Roots and wreath products. To appear in Proc. Cambridge Phil. Soc. **56**, 109—117 (1960).

[4] HALL, P.: Finiteness conditions for soluble groups. Proc. London Math. Soc. (3) **4**, 419—436 (1954).

[5] KALOUJNINE, L., and M. KRASNER: Produit complet des groupes de permutations et problème d'extension des groupes. Acta Sci. Math. Szeged **13**, 208—230 (1950); **14**, 36—66, 69—82 (1951).

[6] NEUMANN, B. H., and HANNA NEUMANN: Embedding theorems for groups. J. London Math. Soc. **34**, 465—479 (1959).

[7] NEUMANN, B. H.: A two-generator group isomorphic to a proper factor group. J. London Math. Soc. **25**, 247—248 (1950).

[8] NEUMANN, B. H.: Some remarks on infinite groups. J. London Math. Soc. **12**, 120—127 (1937).

[9] RABIN, MICHAEL O.: Recursive unsolvability of group theoretic problems. Bull. Amer. Math. Soc. **62**, 396 (1956). — Ann. of Math. **67**, 172—194 (1958).

[10] HIGMAN, G., B. H. NEUMANN and H. NEUMANN: Embedding theorems for groups. J. London Math. Soc. **24**, 247—254 (1949).

Inst. math. Sciences, New York University, New York 3, N.Y. (U.S.A.)

(Eingegangen am 13. April 1960)

Charzynski, Z.
Math. Zeitschr. 75, 29—35 (1961)

Bounds for analytic functions of two complex variables

By

Zygmunt Charzynski[1]

Introduction

In the course of considerations in the theory of functions of two complex variables, S. Bergman introduced a certain class of domains on whose boundary one can define very simply the maximum manifold, which is the so-called Bergman-Szilow boundary ([1], [6]). These domains are bounded by finitely many three-dimensional analytic hypersurfaces. The two-dimensional intersections of these surfaces form the so-called Bergman's distinguished boundary surface.

In a series of papers Bergman obtained the connections between the behavior of an analytic function on the distinguished boundary surface and the behavior in the interior of the domain ([2], [3]).

In another paper Bergman investigated the analogous problem with respect to the three-dimensional boundary hypersurfaces. In this direction he obtained, for a function of two complex variables, various bounds in the interior of the domain, depending on the behavior of the function on the three-dimensional part of the boundary where the function is considered as depending on one complex variable in the so-called laminas forming the hypersurface [4].

This note is a continuation of the investigation just mentioned. We follow a procedure connected with Bergman's original work and define the domains in which the bounds hold. Notions and notations introduced by Bergman are used.

§ 0. Notions and Notations

1. We shall consider an arbitrary bounded domain $\mathfrak{M}$, lying in the four-dimensional space of two complex variables z_1, z_2. We assume that the boundary $\mathfrak{m}^3$ of this domain consists of finitely many uniformized analytic hypersurfaces

$$\mathfrak{i}_k^3 \qquad k = 1, \ldots, n; \tag{0}$$

every such analytic surface is given by parametric equalities of the form

$$z_1^* = h_{1k}(Z, \lambda), \qquad z_2^* = h_{2k}(Z, \lambda), \qquad |Z| \leqq 1, \qquad -\infty < \lambda < +\infty, \tag{00}$$

[1]) This work was supported by the National Science Foundation Grants 3661 and 10375 at Stanford University.

where the expressions on the right side of (00) are continuously differentiable functions of Z, λ, [4]. For a fixed k and λ the corresponding set of points (00) will be called a lamina of $\mathfrak{i}_k^3$ (see [5], p. 188). The set $\mathfrak{D}^2$ of points (00), corresponding to the values $|Z|=1$, contains the so-called distinguished boundary surface on which the maximum principle is realized for the functions regular in $\mathfrak{M}$ (see [3]). We shall assume that the functions (00) are periodical with respect to λ. We shall assume also, that for every $|Z_0|<1$, λ_0, and for arbitrarily small $\delta>0$ the set of points (00) which correspond to the values

$$|Z-Z_0|<\delta, \qquad |\lambda-\lambda_0|<\delta$$

of the parameters, contains all the points of $\mathfrak{m}^3$ lying sufficiently near the point

$$z_{10}=h_{1k}(Z_0,\lambda_0), \qquad z_{20}=h_{2k}(Z_0,\lambda_0).$$

Finally, we shall denote by $\mathfrak{P}_0$ the complement of $\mathfrak{M}$ with respect to the full space.

2. For every $0<R<1$, the part of $\mathfrak{i}_k^3$, which consists of the points (00) corresponding to the values $|Z|<R$, will be denoted by $\mathfrak{i}_{kR}^3$.

3. The set of points of the four-dimensional space of the form

$$(000) \qquad z_1=g_1(\zeta), \qquad z_2=g_2(\zeta), \qquad |\zeta|\leqq 1,$$

where the expressions of the right sides are holomorphic functions of ζ, we shall call an analytic surface.

The set of points which correspond to the values $|\zeta|=1$ will be called the boundary of this surface.

§ 1. Bounds on the Analytic Surfaces

Consider a domain $\mathfrak{M}$ and a part $\mathfrak{i}_k^3$ of the boundary of this domain described above. Let $f(z_1, z_2)$ be an arbitrary function analytic in the closure $\overline{\mathfrak{M}}$.

Assume that there is given a normal family Ψ of functions of one complex variable in the unit circle. Put

$$(1) \qquad M(R)=\sup_{\psi\in\Psi}\sup_{|Z|\leqq R}|\psi(Z)|, \qquad 0<R<1.$$

Suppose that on the boundary part $\mathfrak{i}_k^3$, $f(z_1, z_2)$ satisfies the condition that for every lamina of this set

$$(2) \qquad f[h_{1k}(Z,\lambda), h_{2k}(Z,\lambda)]\in\Psi.$$

Next, for an R between 0 and 1, suppose there is an analytic surface $\mathfrak{B}$ defined by

$$(3) \qquad z_1=g_1(\zeta), \qquad z_2=g_2(\zeta), \qquad |\zeta|\leqq 1,$$

which lies in $\mathfrak{M}+\mathfrak{i}_{kR}^3+\mathfrak{P}_0$, contains the points of $\mathfrak{M}$, and whose boundary lies completely in $\mathfrak{P}_0$.

Now we can obtain the following result.

LEMMA. *On the part of* $\mathfrak{B}$, *which lies in* $\mathfrak{M}$, *the function* $f(z_1, z_2)$ *satisfies the inequality*

$$|f(z_1, z_2)| < M(R). \tag{4}$$

PROOF. Denote by D the inverse image of $\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{M}$ under (3) and by D^* its boundary. Then the set of values of $f(z_1, z_2)$ on $\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{M}$ is identical with the set of values of the composite function $f(g_1(\zeta), g_2(\zeta))$ in D. Now one very easily sees that the image of D^* under (3) lies completely in $\mathfrak{i}^3_{kR}$, that is,

$$g_1(\zeta^*), g_2(\zeta^*) \in \mathfrak{i}^3_{kR} \quad \text{for} \quad \zeta^* \in D^*. \tag{5}$$

Therefore, the composite analytic function $f(g_1(\zeta), g_2(\zeta))$ in $D + D^*$, that is, $f(z_1, z_2)$ in $\mathfrak{B} \cdot \overline{\mathfrak{M}}$, must satisfy the inequalities

$$|f(z_1, z_2)| = |f(g_1(\zeta), g_2(\zeta))| \leqq \sup_{\zeta^* \in D^*} |f(g_1(\zeta^*), g_2(\zeta^*))| \leqq \sup_{z_1^*, z_2^* \in \mathfrak{i}^3_{kR}} |f(z_1^*, z_2^*)|. \tag{6}$$

On the other hand, according to the previous definitions for every point z_1^*, z_2^* of $\mathfrak{i}^3_{kR}$ we have the representation of the form (00) with $|Z| < R$. From (00), (2), and (1) we obtain that in $\mathfrak{i}^3_{kR}$

$$|f(z_1^*, z_2^*)| = |f[h_{1k}(Z, \lambda), h_{2k}(Z, \lambda)]| \leqq M(R) \tag{7}$$

holds. The relations (6) and (7) give the expected inequality (4).

§ 2. Associated Domains

We shall define for k from (0) and R between 0 and 1 a sequence of sets $\{\mathfrak{P}_m\}$ by induction as follows:

1. $\mathfrak{P}_1$ is the set of all points $z_1, z_2 \in \mathfrak{M}$ which belongs to all of the analytic surfaces $\mathfrak{B}_1$:

$$z_1 = g_1(\zeta), \qquad z_2 = g_2(\zeta), \qquad |\zeta| \leqq 1,$$

lying in $\mathfrak{M} + \mathfrak{i}^3_{kR} + \mathfrak{P}_0$, and having its boundary in $\mathfrak{P}_0$.

2. $\mathfrak{P}_{m-1}$ is the set of all points $z_1, z_2 \in \mathfrak{M} - (\overline{\mathfrak{P}}_1 + \cdots + \overline{\mathfrak{P}}_m)$ which belongs to all of the analytic surfaces $\mathfrak{B}_{m+1}$:

$$z_1 = g_1(\zeta), \qquad z_2 = g_2(\zeta), \qquad |\zeta| \leqq 1, \tag{8}$$

lying in $\mathfrak{M} + \mathfrak{i}^3_{kR} + \mathfrak{P}_0 + \cdots + \mathfrak{P}_m$ and having its boundary in $\mathfrak{P}_0 + \mathfrak{P}_1 + \cdots + \mathfrak{P}_m$.

The sum of all the sets of $\{\mathfrak{P}_m\}$ will be denoted by $\mathfrak{P}_{kR}$ and called the associated domain corresponding to the part $\mathfrak{i}^3_k$ and to the number R. The sequence $\{\mathfrak{P}_m\}$ and the set $\mathfrak{P}_{kR}$, described above, have the following properties:

I. Every $\mathfrak{P}_m$ is either an empty or open set. Consider the first set of our sequence, say $\mathfrak{P}_m$, which does not satisfy this property, then all preceding sets $\mathfrak{P}_0, \ldots, \mathfrak{P}_{m-1}$ are either empty or open; $\mathfrak{P}_0$ is open. According to the definitions and assumptions given above, the sets $(\mathfrak{M} + \mathfrak{i}^3_{kR} + \mathfrak{P}_0) + \cdots + \mathfrak{P}_{m-1}$

and $\mathfrak{P}_0+\cdots+\mathfrak{P}_{m-1}$ are open also[2]). Now, suppose the set $\mathfrak{P}_m$ is not empty and consider an arbitrary point $\hat{z}_1, \hat{z}_2$ of it. From the definition of $\mathfrak{P}_m$ follows immediately that there is an analytic surface $\hat{\mathfrak{B}}_m$:

$$z_1=\hat{g}_1(\zeta), \qquad z_2=\hat{g}_2(\zeta), \qquad |\zeta|\leqq 1,$$

lying in $(\mathfrak{M}+\mathfrak{i}^3_{kR}+\mathfrak{P}_0)+\cdots+\mathfrak{P}_{m-1}$ having its boundary in $\mathfrak{P}_0+\cdots+\mathfrak{P}_{m-1}$ and containing the point $\hat{z}_1, \hat{z}_2$. By a linear transformation of the parameter ζ one can assume that

$$\hat{z}_1=\hat{g}_1(0), \qquad \hat{z}_2=\hat{g}_2(0).$$

The set $\hat{\mathfrak{B}}_m$ and its boundary $\hat{\mathfrak{B}}^*_m$ are closed sets lying in the open sets $(\mathfrak{M}+\mathfrak{i}^3_{kR}+\mathfrak{P}_0)+\cdots+\mathfrak{P}_{m-1}$ and $\mathfrak{P}_0+\cdots+\mathfrak{P}_{m-1}$, respectively. Then there is a positive number d, so that for every point $z_1^{\cdot}, z_2^{\cdot}$ satisfying the condition

$$\sqrt{|z_1^{\cdot}-\hat{z}_1|^2+|z_2^{\cdot}-\hat{z}_2|^2}<d, \tag{9}$$

the analytic surface $\mathfrak{B}_m^{\cdot}$:

$$z_1=\hat{g}_1(\zeta)+(z_1^{\cdot}-\hat{z}_1), \qquad z_2=\hat{g}_2(\zeta)+(z_2^{\cdot}-\hat{z}_2), \qquad |\zeta|\leqq 1,$$

lies in $(\mathfrak{M}+\mathfrak{i}^3_{kR}+\mathfrak{P}_0)+\cdots+\mathfrak{P}_{m-1}$, has its boundary in $\mathfrak{P}_0+\cdots+\mathfrak{P}_{m-1}$, and contains the point $z_1^{\cdot}, z_2^{\cdot}$, which corresponds to the value 0 of the parameter ζ. Thus an arbitrary point $z_1^{\cdot}, z_2^{\cdot}$ of the neighborhood (9) of $\hat{z}_1, \hat{z}_2$ belongs to $\mathfrak{P}_m$ according to the conditions of induction. Since the point $\hat{z}_1, \hat{z}_2$ was also arbitrarily chosen from $\mathfrak{P}_m$, then the set $\mathfrak{P}_m$ is open.

II. The set $\mathfrak{P}_{kR}$ cannot be extended by an operation analogous to that applied by the previous induction. This means that there are no points $\hat{z}_1, \hat{z}_2$ in $\mathfrak{M}-\overline{\mathfrak{P}}_{kR}$, for which there exists an analytic surface $\hat{\mathfrak{B}}$:

$$z_1=\hat{g}_1(\zeta), \qquad \hat{z}_2=\hat{g}_1(\zeta), \qquad |\zeta|\leqq 1,$$

lying in $\mathfrak{M}+\mathfrak{i}^3_{kR}+\mathfrak{P}_0+\mathfrak{P}_{kR}$, having its boundary in $\mathfrak{P}_{kR}+\mathfrak{P}_0$ and containing the point $\hat{z}_1, \hat{z}_2$.

In fact, suppose, contrariwise, that the point and surface described above exist. Then the closed sets $\hat{\mathfrak{B}}$ and its boundary $\hat{\mathfrak{B}}^*$ lie, respectively, in the open sets $\mathfrak{M}+\mathfrak{i}^3_{kR}+\mathfrak{P}_0+\mathfrak{P}_{kR}$ and $\mathfrak{P}_0+\mathfrak{P}_{kR}$ (see property I). Thus from the Heine-Borel theorem it follows that $\hat{\mathfrak{B}}$ and $\hat{\mathfrak{B}}^*$ must lie in finite sums of sets $(\mathfrak{M}+\mathfrak{i}^3_{kR}+\mathfrak{P}_0)+\mathfrak{P}_1+\cdots+\mathfrak{P}_m$ and $\mathfrak{P}_0+\mathfrak{P}_1+\cdots+\mathfrak{P}_m$, respectively. But in this case the point $\hat{z}_1, \hat{z}_2$ of $\hat{\mathfrak{B}}$ must belong to the set $\mathfrak{P}_{m+1}$ in view of the inductive definition. This contradicts the assumption.

III. The set $\overline{\mathfrak{P}}_{kR}$ is locally pseudo convex with respect to its exterior at every point z_1^0, z_2^0 of its boundary which lies in $\mathfrak{M}$. This means, that every analytic surface which passes through z_1^0, z_2^0 must possess in every neighborhood of z_1^0, z_2^0 points of the exterior or boundary of $\mathfrak{P}_{kR}$ different from z_1^0, z_2^0.

[2]) See p. 2, § 0.1.

In fact, suppose, contrariwise, that there is a neighborhood of z_1^0, z_2^0 and a surface $\mathfrak{B}_0$:

$$z_1 = g_{10}(\zeta), \qquad z_2 = g_{20}(\zeta), \qquad |\zeta| \leqq 1,$$

which contains z_1^0, z_2^0 and, except at this point, lies completely in the set $\mathfrak{P}_{kR}$. We can assume obviously that

$$z_1^0 = g_{10}(0), \qquad z_2^0 = g_{20}(0).$$

The boundary of $\mathfrak{B}_0$ is a closed set lying in $\mathfrak{P}_{kR}$ and it has a positive distance from the boundary of $\mathfrak{P}_{kR}$. Then we can take an arbitrary point $\hat{z}_1, \hat{z}_2$ of $\mathfrak{M} - \overline{\mathfrak{P}}_{kR}$ sufficiently near z_1^0, z_2^0 and form a new surface $\hat{\mathfrak{B}}$:

$$z_1 = g_{10}(\zeta) + (\hat{z}_1 - z_1^0), \qquad z_2 = g_{20}(\zeta) + (\hat{z}_2 - z_2^0), \qquad |\zeta| \leqq 1.$$

Thus, one sees that the surface $\hat{\mathfrak{B}}$ lies in $\mathfrak{M} + \mathfrak{P}_{kR}$, contains the point $\hat{z}_1, \hat{z}_2$ and its boundary is in $\mathfrak{P}_{kR}$. But this contradicts the previous property (see II).

Now we can obtain the following result:

THEOREM. *The function $f(z_1, z_2)$ satisfies the inequality*

$$|f(z_1, z_2)| < M(R) \tag{10}$$

in the full set $\mathfrak{P}_{kR}$ and consequently also in its closure $\overline{\mathfrak{P}}_{kR}$.

PROOF. It is sufficient to show that (10) holds in every set of $\{\mathfrak{P}_m\}$. We proceed by induction:

1°. In $\mathfrak{P}_1$ the inequality (10) holds according to the lemma given in 1.

2°. Suppose that (10) holds in the sets $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_m$ and consequently on the boundary of $\mathfrak{P}_1 + \cdots + \mathfrak{P}_m$. Consider the set $\mathfrak{P}_{m+1}$ and a point z_1, z_2 of it. There exists for this point a surface $\mathfrak{B}_{m+1}$ described in condition 2 of the definition of $\mathfrak{P}_{m+1}$ given above. Denote by D the inverse image of $\mathfrak{B}_{m+1} \cdot (\mathfrak{M} - (\overline{\mathfrak{P}}_1 + \cdots + \overline{\mathfrak{P}}_m))$ under (8), and by D^* the boundary of D. We conclude, as before, for similar reasons that the image of D^* under (8) must lie completely on the boundary of $\mathfrak{P}_1 + \cdots + \mathfrak{P}_m$ or in $\mathfrak{i}_{kR}^3$. Then we obtain from the preceding remark that the inequality (10) holds on $\mathfrak{B}_{m+1} \cdot (\mathfrak{M} - (\overline{\mathfrak{P}}_1 + \cdots + \overline{\mathfrak{P}}_m))$ and in particular at the point z_1, z_2. Since z_1, z_2 was an arbitrary point of $\mathfrak{P}_{m+1}$, our inequality holds in the full set $\mathfrak{P}_{m+1}$.

Induction finishes the proof.

§ 3. Remarks

1. If we know the bound U_k for $|f(z_1, z_2)|$ on the part of $\mathfrak{i}_k^3$, which belongs to the distinguished boundary surface $\mathfrak{D}^2$, we can obtain the bound for $|f(z_1, z_2)|$ in $\mathfrak{P}_{kR}$ using the Cauchy formula for one variable. Namely, we have in this case

$$M(R) \leqq \frac{U_k}{1 - R}$$

and therefore

$$|f(z_1, z_2)| < \frac{U_k}{1 - R} \quad \text{for} \quad z_1, z_2 \in \mathfrak{P}_{kR}.$$

In some cases this inequality can be more conveniently applied than an analogous inequality which follows from the known Bergman integral formula for functions of two complex variables (in terms of values on the distinguished boundary surface):

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{8\pi^2} \sum_{\substack{k,s=1,\dots,n \\ k \neq s}} \iint_{\mathfrak{v}_{ks}} \frac{f(\varphi_1(\lambda_k, \lambda_s), \varphi_2(\lambda_k, \lambda_s))\, B_{ks}(t_1, t_2, \lambda_k, \lambda_s)}{\Phi_k(t_1, t_2, \lambda_k)\, \Phi_s(t_1, t_2, \lambda_s)}\, d\lambda_k\, d\lambda_s .$$

Here $\Phi_j(t_1, t_2, \lambda_j)$, and $B_{ks}(t_1, t_2, \lambda_k, \lambda_s)$ are certain functions which depend on the domain; $z_1 = \varphi_1(\lambda_k, \lambda_s)$, $z_2 = \varphi_2(\lambda_k, \lambda_s)$, $\lambda_k, \lambda_s \in \mathfrak{v}_{ks}$ are the parametric representations of the intersections of the analytic hypersurfaces $\mathfrak{i}_k^3$ and $\mathfrak{i}_s^3$; $j = 1, \dots, n$, $k, s = 1, \dots, n$, [2].

2. S. BERGMAN considered in his work some examples of normal families and gave the exact corresponding bounds ([4], p. 186—193). They can easily be obtained from our theorem by substituting the corresponding known bounds instead of $M(R)$.

We shall give here these bounds in the case of families of multivalent functions.

Suppose that the function $f(z_1, z_2)$, mentioned above, is multivalent in every lamina of $\mathfrak{i}_k^3$; this means more exactly, that the composite function $f(h_{1k}(Z, \lambda), h_{2k}(Z, \lambda))$ is a multivalent function of order p, which does not vanish except at the point 0. For this family the bound $M(R)$ is known ([7], [8], [9]). Thus we obtain for the mentioned function the following estimation

$$|f(z_1, z_2)| < A(p)\,(1 - R)^{-2p} \qquad \text{for} \qquad z_1, z_2 \in \mathfrak{P}_{kR},$$

where $A(p)$ is a universal function, independent from $f(z_1, z_2)$.

3. One sees that one can assume in these considerations, that the function $f(z_1, z_2)$ is regular in the interior of $\mathfrak{M}$ and on the boundary sets $(0, 0)$ which correspond only to the values of Z in the interior of the unit circle. On the distinguished boundary surface it may be that the function is not regular.

If we consider a point of the distinguished boundary

$$z_1^* = h_{1k}(Z^*, \lambda^*), \qquad z_2^* = h_{2k}(Z^*, \lambda^*),$$

and approach this point from the set $\sum_{0<R<1} \mathfrak{P}_{kR}$ along a curve L:

$$z_1 = z_1(t), \qquad z_2 = z_2(t), \qquad \alpha \leqq t \leqq \beta, \tag{11}$$

then we have on L, according to (10), the estimation

$$|f(z_1(t), z_2(t))| \leqq M(R(t)),$$

where $R(t)$ denotes the upper bound of numbers $0 < R < 1$, for which $z_1(t)$, $z_2(t) \in \mathfrak{P}_{kR}$. The inequality (11) can give some information about the behavior of $f(z_1, z_2)$ while approaching a point on the distinguished boundary surface.

4. One easily sees that these results can be extended to the case of functions of several complex variables, but not of one variable.

Bibliography

[1] Bergman, S.: Über die Abbildungen durch Paare von Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen. Jber. dtsch. Math. Ver. **39**, 24—27 (1930).

[2] Bergmann, S.: Über eine in gewissen Bereichen mit Maximumfläche gültige Integraldarstellung der Funktionen zweier komplexer Variabler. I, II. Math. Z. **39**, 76—94, 605—608 (1934).

[3] Bergmann, S.: Über das Verhalten der Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen in Gebieten mit einer ausgezeichneten Randfläche. Comp. Mathematica **14**, 107—123 (1938).

[4] Bergmann, S.: Bounds for analytic functions in domains with a distinguished boundary surface. Math. Z. **63**, 173—194 (1955).

[5] Bergmann, S.: Über eine Abschätzung von meromorphen Funktionen zweier komplexer Veränderlicher in Bereichen mit ausgezeichneter Randfläche. Trav. Inst. Math. Tbilissi **1**, 187—204 (1937).

[6] Gelfand, J. M., D. A. Rajkow u. D. E. Szilow: Kommutative normierte Ringe. [Russisch.] Uspechi mat. Nauk **12**, 48—146 (1946).

[7] Biernacki, M.: Sur les fonctions multivalentes d'ordre p. C. R. Acad. Sci. Paris **204**, 449—451 (1936).

[8] Cartwright, M. L.: Inequalities in the theory of functions. Math. Ann. **111**, 98—118 (1935).

[9] Robertson, M. S.: Multivalent functions of order p. Bull. Amer. Math. Soc. **44**, 282—285 (1938).

Mathematisches Institut der Universität Lodz (Polen)

(Eingegangen am 16. April 1960)

Roelcke, W.
Math. Zeitschr. 75, 36—52 (1961)

Über diskontinuierliche Gruppen in lokal-kompakten Räumen*

Von

Walter Roelcke

Das Kernstück der vorliegenden Arbeit bildet die Konstruktion lokalendlicher, unter einer diskontinuierlichen Gruppe Γ invarianter Überdeckungen des zugrunde liegenden lokal-kompakten Raumes X (Satz 4). Als Korollar ergibt sich die Existenz bei Γ invarianter Zerlegungen der Eins auf X, die sich vorgegebenen Überdeckungen in gewisser Weise unterordnen. Anschließend wird die Parakompaktheit des Quotientenraumes X/Γ diskutiert (§ 3). Invariante Zerlegungen der Eins werden sodann als entscheidendes Hilfsmittel für die Konstruktion von vollständigen invarianten Riemannschen Maßbestimmungen auf n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten mit diskontinuierlichen Gruppen eingesetzt (Satz 7). Hierdurch wird die klassische Konstruktion von Fundamentalbereichen von Γ in Gestalt von Normalpolyedern mit den üblichen Eigenschaften ermöglicht (vgl. [1], Satz 5 bis 7). Satz 8 betrifft fixpunkthaltige stetig differenzierbare periodische Selbstabbildungen von n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, und Satz 9 gibt eine Bedingung dafür an, daß die Fixpunktmenge einer diskontinuierlichen Gruppe auf einer Mannigfaltigkeit eine Nullmenge ist.

Wir stellen jetzt einige Bezeichnungen und Begriffe zusammen. Ist X ein topologischer Raum, so bezeichnen wir die abgeschlossene Hülle einer Menge $A \subset X$ mit $\bar{A}$, den offenen Kern von A, d.h. die Menge der inneren Punkte von A, mit $\mathring{A}$ und den Rand von A mit $\mathrm{Rd}\, A$. X heißt *σ-kompakt* oder auch abzählbar im Unendlichen, wenn X die Vereinigung von abzählbar vielen Kompakta ist. — Eine Grupp Γ von Homöomorphismen von X heißt *diskontinuierlich* auf X, wenn die Folge $\alpha_k x$ $(k \geqq 1)$ für jede Wahl eines Punktes $x \in X$ und einer Folge α_k $(k \geqq 1)$ von verschiedenen Elementen aus Γ keinen Häufungspunkt in X besitzt. Die Identität von Γ bezeichnen wir mit ι. — Für beliebige Teilmengen A, B von X und $\Lambda \subset \Gamma$ setzen wir

$$A - B := \{x;\ x \in A,\ x \notin B\}^{1}),$$

$$\Lambda A := \{\alpha x;\ \alpha \in \Lambda,\ x \in A\}.$$

*) Die vorliegende Arbeit ist im wesentlichen identisch mit § 1 meiner von der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Münster angenommenen Habilitationsschrift „Automorphe Funktionen und Spektraltheorie".

[1]) Allgemein bedeute $P := Q$ oder $Q =: P$, daß P durch Q definiert wird.

§ 1. Eigentliche Diskontinuierlichkeit und einfache Folgerungen

Eine Gruppe Γ von Homöomorphismen eines topologischen Raumes X heißt *eigentlich diskontinuierlich* auf X, wenn je zwei Punkte $x, y \in X$ Umgebungen U bzw. V besitzen, so daß die Relation $U \cap \alpha V \neq \emptyset$ nur für endlich viele $\alpha \in \Gamma$ gilt. Zum Beispiel ist jede diskontinuierliche Gruppe von Isometrien eines metrischen Raumes eigentlich diskontinuierlich. — Aus der eigentlichen Diskontinuierlichkeit folgt offenbar die Diskontinuierlichkeit. Eine unmittelbare Folgerung aus der eigentlichen Diskontinuierlichkeit ist ferner: Sind A, B Kompakta aus X, so gilt $A \cap \alpha B \neq \emptyset$ nur für endlich viele $\alpha \in \Gamma$. Für lokal-kompaktes X ist diese Aussage offenbar gleichwertig mit der eigentlichen Diskontinuierlichkeit von Γ.

Eine Verschärfung des Begriffes der eigentlichen Diskontinuierlichkeit wäre die Forderung: Es gibt eine Überdeckung von X durch offene Mengen, derart daß für je zwei dieser Mengen U, V die Relation $U \cap \alpha V \neq \emptyset$ nur für endlich viele $\alpha \in \Gamma$ zutrifft. Diese Forderung könnte zur Abschwächung der Voraussetzung der lokalen Kompaktheit in Satz 4 herangezogen werden.

Wir übernehmen aus [1], S. 336 das folgende

Lemma. *Ist Γ eigentlich diskontinuierlich, so gibt es zu jedem $x \in X$ und jeder Umgebung U von x eine Umgebung V von x, $V \subset U$, so daß die folgenden drei Aussagen, in denen α jeweils dasselbe Element aus Γ bezeichnet, gleichwertig sind:*

a) $x = \alpha x$; b) $V = \alpha V$; c) $V \cap \alpha V \neq \emptyset$.

Aus diesem Lemma folgt

Satz 1. *Es sei X ein topologischer Raum und Γ eine eigentlich diskontinuierliche Gruppe von Homöomorphismen von X. Für $\alpha \in \Gamma$ bezeichne A_α die Menge der Fixpunkte von α in X. Dann besitzt jedes $x \in X$ eine Umgebung U, so daß die Relation $U \cap A_\alpha \neq \emptyset$ nur für endlich viele $\alpha \in \Gamma$ zutrifft.*

Beweis. Zu vorgegebenem x gibt es dem Lemma zufolge eine Umgebung U von x, so daß für jedes $\alpha \in \Gamma$ die beiden Aussagen $U \cap \alpha U \neq \emptyset$ und $x = \alpha x$ äquivalent sind. Aus einer Relation $U \cap A_\alpha \neq \emptyset$ mit einem $\alpha \in \Gamma$ folgt dann

$$U \cap \alpha U \supset (U \cap A_\alpha) \cap \alpha (U \cap A_\alpha) = U \cap A_\alpha \neq \emptyset,$$

und auf Grund der Auswahl von U folgt $\alpha x = x$. Wegen der eigentlichen Diskontinuierlichkeit von Γ gibt es hier für α nur endlich viele Möglichkeiten. Die Umgebung U ist also schon von der gewünschten Art. Satz 1 wird im Beweis von Satz 9 benutzt werden.

Der durch Identifizieren nach Γ äquivalenter Punkte entstehende Quotientenraum X/Γ ist bei eigentlich diskontinuierlichem Γ offenbar Hausdorffsch. Hiervon gilt die folgende schwache Umkehrung.

Satz 2. *Es sei X ein lokal-zusammenhängender, lokal-kompakter Hausdorffscher Raum, Γ sei eine diskontinuierliche Gruppe von Homöomorphismen von X, und X/Γ sei Hausdorffsch. Dann ist Γ eigentlich diskontinuierlich.*

BEWEIS. Zu beliebig vorgegebenen x, $y \in X$ existiert offenbar eine kompakte Umgebung U von x, deren Rand keinen mit y äquivalenten Punkt enthält. Bezeichnet π die natürliche stetige Abbildung von X auf X/Γ, so ist $\pi y \notin \pi \operatorname{Rd} U$, und da $\pi R d U$ kompakt *und* X/Γ Hausdorffsch ist, ist

$$W' := X/\Gamma - \pi \operatorname{Rd} U$$

eine Umgebung von πy in X/Γ. Dann ist $W := \pi^{-1} W'$ eine Umgebung von y mit der Eigenschaft

$$\operatorname{Rd} U \cap \Gamma W = \emptyset. \tag{1}$$

Es sei nun V eine feste in W enthaltene zusammenhängende Umgebung von y. Wenn dann $U \cap \alpha V \neq \emptyset$ für ein $\alpha \in \Gamma$ gilt, liefert der Zusammenhang von V und (1) die Relation $\alpha V \subset U$. Wegen der Kompaktheit von U und der Diskontinuierlichkeit von Γ gibt es hier für α nur endlich viele Möglichkeiten. Hiermit folgt die Behauptung.

In Satz 2 kann übrigens auf den lokalen Zusammenhang von X nicht verzichtet werden, wie ein Beispiel von A. DOLD zeigt. — Wir beschließen den Paragraphen mit einer Aussage über den lokalen Zusammenhang.

SATZ 3. *Es sei X ein topologischer Raum und Γ eine eigentlich diskontinuierliche Gruppe von Homöomorphismen von X. Dann gilt: X ist dann und nur dann lokal-zusammenhängend, wenn X/Γ lokal-zusammenhängend ist.*

BEWEIS. 1. X sei lokal-zusammenhängend. $a' \in X/\Gamma$ und eine Umgebung U' von a' seien vorgegeben. Wir müssen die Existenz einer zusammenhängenden Umgebung V' von a', $V' \subset U'$, zeigen. Wir wählen dazu $a \in X$, so daß $\pi a = a'$, und eine Umgebung U von a, so daß $\pi U \subset U'$. U enthält eine zusammenhängende Umgebung V von a. Dann kann $V' = \pi V$ gewählt werden.

2. X/Γ sei lokal-zusammenhängend. $a \in X$ und eine Umgebung U von a seien vorgegeben. Zum Nachweis einer zusammenhängenden Umgebung V von a, $V \subset U$, sei W eine Umgebung von a, so daß $W \subset U$ und für jedes $\alpha \subset \Gamma$ die drei folgenden Aussagen äquivalent sind (s. Lemma):

$$W \cap \alpha W \neq \emptyset, \qquad W = \alpha W, \qquad a = \alpha a.$$

W kann und soll hier offen gewählt werden. πW enthält dann eine zusammenhängende offene Umgebung V' von πa. Wir zeigen, daß dann

$$V := W \cap \pi^{-1} V'$$

gewählt werden kann. Jedenfalls ist V eine Umgebung von a, und es gilt $V \subset U$. Ferner ist V offen und

$$\pi V = V'. \tag{2}$$

Angenommen V ist nicht zusammenhängend. Es gibt dann eine Zerlegung von V in zwei nichtleere offene Teilmengen A, B. Es sei etwa $a \in A$. Der endliche Durchschnitt

$$A_0 := \bigcap_{\substack{\alpha \in \Gamma \\ \alpha a = a}} \alpha A$$

ist dann eine offene Teilmenge von V', und es ist $a \in A_0$. Ebenso wie A ist auch A_0 im Relativraum V abgeschlossen. Daher ist

$$B_0 := V - A_0 \tag{3}$$

offen. Wegen $B \subset B_0$ ist $B_0 \neq \emptyset$. Also ist V' [vgl. (2)] die Vereinigung der beiden nichtleeren offenen Mengen πA_0, πB_0. Wenn wir nun noch

$$\pi A_0 \cap \pi B_0 = \emptyset \tag{4}$$

zeigen, haben wir den gewünschten Widerspruch, nämlich zum Zusammenhang von V'. Angenommen (4) ist falsch. Dann gibt es ein $\alpha \in \Gamma$, so daß

$$\alpha A_0 \cap B_0 \neq \emptyset. \tag{5}$$

Dann ist erst recht $\alpha W \cap W \neq \emptyset$, und auf Grund der Auswahl von W folgt $\alpha a = a$. Für diese α ist aber $\alpha A_0 = A_0$. (5) liefert also $A_0 \cap B_0 \neq \emptyset$ im Widerspruch zu (3). Damit ist (4) bewiesen und zugleich der Beweis des Satzes beendet.

§ 2. Konstruktion invarianter Zerlegungen der Eins

Eine *Überdeckung* von X ist eine Familie $U = \{U_i | i \in \mathfrak{J}\}$ von Teilmengen U_i von X, so daß $X = \bigcup_{i \in \mathfrak{J}} U_i$. Bei der Abbildung $U: i \to U_i$ dürfen verschiedene Elemente i der Indexmenge $\mathfrak{J}$ dasselbe Bild U_i haben. Die Überdeckung U heißt *offen*, wenn die Mengen U_i offen sind, *abzählbar*, wenn $\mathfrak{J}$ abzählbar ist, und *lokal-endlich*, wenn jedes $x \in X$ eine Umgebung W besitzt, so daß $W \cap U_i \neq \emptyset$ nur für endlich viele $i \in \mathfrak{J}$ gilt. U heißt *vom endlichen Typ*, wenn für jedes $i \in \mathfrak{J}$ die Relation $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ nur für endlich viele $j \in \mathfrak{J}$ gilt. — Eine offene Überdeckung $V = \{V_i | j \in \mathfrak{J}\}$ heißt eine *Verfeinerung* (bzw. *Quasischrumpfung*) einer offenen Überdeckung U, wenn es zu jedem $j \in \mathfrak{J}$ ein $i \in \mathfrak{J}$ gibt, so daß $V_j \subset U_i$ (bzw. $\overline{V}_j \subset U_i$). V heißt eine *Schrumpfung* von U, wenn $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}$ ist und $\overline{V}_i \subset U_i$ für alle $i \in \mathfrak{J}$ gilt.

Der Raum X heißt *parakompakt*, wenn er Hausdorffsch ist und jede offene Überdeckung von X eine lokal-endliche Verfeinerung besitzt. Damit gleichwertig ist, daß jede offene Überdeckung von X eine lokal-endliche Quasischrumpfung besitzt.

Satz 4. *Es sei X ein lokal-kompakter Hausdorffscher Raum und Γ eine eigentlich diskontinuierliche Gruppe von Homöomorphismen von X. Der Quotientenraum $X|\Gamma$ sei parakompakt. Dann gilt*

I. Zu jeder offenen Überdeckung $W = \{W_i | i \in \mathfrak{J}\}$ von X gibt es eine Familie $U = \{U_m | m \in \mathfrak{M}\}$ von Teilmengen von X, so daß gilt

a) U_m ist offen, $\overline{U}_m$ kompakt;

b) zu jedem $m \in \mathfrak{M}$ gibt es ein $i \in \mathfrak{J}$, so daß $\overline{U}_m \subset W_i$;

c) $A := \{\alpha U_m | (\alpha, m) \in \Gamma \times \mathfrak{M}\}$ ist eine offene Überdeckung von X vom endlichen Typ;

d) bezeichnet π die natürliche Abbildung von X auf X/Γ, so ist πU eine offene Überdeckung von X/Γ vom endlichen Typ;

e) falls X σ-kompakt ist, können U und A abzählbar gewählt werden.

II. Jede Überdeckung A von X vom endlichen Typ, die sich von einer Familie U mit den obigen Eigenschaften a), b) auf die in c) beschriebene Weise herleitet, besitzt eine Schrumpfung B derselben Art, d.h. es gibt eine Familie $V=\{V_m \mid m\in\mathfrak{M}\}$ von Teilmengen von X ($\mathfrak{M}$ Indexmenge von U), so daß gilt

a') V_m offen, $\overline{V}_m$ kompakt;

b') $\overline{V}_m \subset U_m$;

c') $B:=\{\alpha V_m \mid (\alpha, m)\in\Gamma\times\mathfrak{M}\}$ ist eine Überdeckung von X.

BEMERKUNG. Die Überdeckungen A, B sind bei Γ invariant: Ausübung einer Transformation $\beta\in\Gamma$ auf A, B kommt auf eine Permutation der Indexmenge $\Gamma\times\mathfrak{M}$ hinaus.

BEWEIS. Zu I. Zu jedem $i\in\mathfrak{I}$ und jedem $x\in W_i$ gibt es eine offene Umgebung $G_i(x)$, so daß $\overline{G_i(x)}\subset W_i$ und $\overline{G_i(x)}$ kompakt ist.

$$G:=\{G_i(x)\mid (i,x)\in\mathfrak{I}\times X\}$$

ist dann eine Quasischrumpfung von W. Bezeichnet π die natürliche Abbildung von X auf X/Γ, so ist πG eine offene Überdeckung von X/Γ. Da X/Γ parakompakt und lokal-kompakt ist, besitzt πG eine Quasischrumpfung

$$U'=\{U'_m \mid m\in\mathfrak{M}\}$$

vom endlichen Typ, und falls X σ-kompakt ist, kann $\mathfrak{M}$ abzählbar gewählt werden (N. BOURBAKI [2], S. 109, Prop. 20). Zu jedem $m\in\mathfrak{M}$ gibt es also ein Paar (i_m, x_m) aus $\mathfrak{I}\times X$, so daß

$$U'_m\subset \pi G_{i_m}(x_m). \tag{6}$$

Für $E\subset X/\Gamma$ sei allgemein

$$\pi^{-1}E:=\{x;\ x\in X,\ \pi x\in E\}.$$

Wir zeigen dann, daß die Familie

$$U:=\{U_m \mid U_m:=\pi^{-1}U'_m\cap G_{i_m}(x_m),\ m\in\mathfrak{M}\} \tag{7}$$

die im Satz behaupteten Eigenschaften hat.

a) U_m ist offenbar offen. $\overline{U}_m$ ist kompakt, da die $\overline{G_i(x)}$ kompakt sind.

b) Nach Konstruktion ist $\overline{U}_m\subset\overline{G_{i_m}(x_m)}\subset W_{i_m}$.

c) Die Mengen αU_m sind offen, da die Mengen U_m offen sind. — Zum Nachweis, daß A eine Überdeckung von X ist, genügt es wegen der Invarianz von A zu zeigen

$$\bigcup_{m\in\mathfrak{M}}\pi U_m = X/\Gamma.$$

Nach (7) und (6) ist aber $\pi U_m = U'_m$, und U' ist eine Überdeckung von X/Γ. — Zum Nachweis, daß A vom endlichen Typ ist, sei (α, m) aus $\Gamma \times \mathfrak{M}$ vorgegeben. Aus einer Relation

$$\alpha U_m \cap \beta U_p \neq \emptyset \quad \text{mit} \quad (\beta, p) \in \Gamma \times \mathfrak{M}$$

folgt durch Anwendung von π, daß $U'_m \cap U'_p \neq \emptyset$ ist. Da U' vom endlichen Typ ist, gibt es also für p nur endlich viele Möglichkeiten. Da $\overline{U}_m$, $\overline{U}_p$ kompakt sind und Γ eigentlich diskontinuierlich ist, folgt daher, daß es auch für β nur endlich viele Möglichkeiten gibt.

d) folgt aus c).

e) Falls X σ-kompakt ist, ist Γ abzählbar, und $\mathfrak{M}$ konnte abzählbar gewählt werden.

Zu II. Es sei A eine Überdeckung von X der unter II. gennanten Art. πU ist dann eine offene Überdeckung von X/Γ vom endlichen Typ. Da X/Γ als parakompakter Raum normal ist (s. z.B. J. O. Kelley [3], S. 159), besitzt πU also eine Schrumpfung V'. Wir wählen dann zu jedem $m \in \mathfrak{M}$ und $x \in U_m$ eine offene Umgebung $H_m(x)$ von x, so daß $\overline{H_m(x)} \subset U_m$. Dann gilt

$$\bigcup_{x \in U_m} \pi H_m(x) = \pi U_m \supset \overline{V}'_m .$$

Da $\overline{V}'_m$ kompakt ist, genügen hier endlich viele der Mengen $\pi H_m(x)$ zur Überdeckung von V'_m, etwa die Mengen $\pi H_m(x_j)$ $(1 \leqq j \leqq k_m)$. Wir setzen dann

$$V_m := \bigcup_{1 \leqq j \leqq k_m} H_m(x_j) .$$

Die Familie $V := \{V_m | m \in \mathfrak{M}\}$ hat dann die gewünschten Eigenschaften. Denn a'), b') sind klar, und c') gilt wegen $\pi V_m \supset V'_m$ $(m \in \mathfrak{M})$ und da V' eine Überdeckung von X/Γ ist. Damit ist Satz 4 vollständig bewiesen.

Durch eine einfache Variante des Beweises läßt sich übrigens über die Aussagen des Satzes hinaus erreichen

$$U_m = \alpha U_m \quad \text{und} \quad V_m = \alpha V_m \quad \text{falls} \quad U_m \cap \alpha U_m \neq \emptyset \qquad (m \in \mathfrak{M},\ \alpha \in \Gamma).$$

Das wird jedoch im folgenden nicht benötigt.

Ist h eine auf X definierte Funktion (Abbildung) und α eine topologische Selbstabbildung von X, so bezeichne allgemein $h^\alpha = h \circ \alpha$ die durch $h^\alpha(x) := h(\alpha x)$ $(x \in X)$ definierte Funktion. Wir beweisen dann das folgende Korollar von Satz 4.

Korollar. *Zu jedem Paar von Überdeckungen A, B der in Satz 4 genannten Art gibt es eine Familie $\{f_m | m \in \mathfrak{M}\}$ von reellen, nicht-negativen stetigen Funktionen f_m auf X, so daß für alle $m \in \mathfrak{M}$ gilt*

$$f_m(x) > 0 \quad \text{für} \quad x \in V_m, \qquad f_m(x) = 0 \quad \text{für} \quad x \in X - U_m,$$

$$\sum_{\substack{\alpha \in \Gamma \\ m \in \mathfrak{M}}} f_m^\alpha = 1 \quad \textit{(bei Γ invariante Zerlegung der Eins).}$$

BEWEIS. Auf Grund des Lemmas von URYSOHN gibt es zu jedem $m \in \mathfrak{M}$ eine stetige reelle Funktion $g_m \geqq 0$ auf X, derart, daß g_m auf $\overline{V}_m$ positiv ist und auf $X - U_m$ verschwindet. Die Funktion

$$g := \sum_{\substack{\alpha \in \Gamma \\ m \in \mathfrak{M}}} g_m^\alpha$$

ist dann wohl definiert, stetig, positiv und invariant bei Γ. Die Funktionen

$$f_m := \frac{g_m}{g} \qquad (m \in \mathfrak{M})$$

haben dann die gewünschten Eigenschaften.

Es kommen jetzt noch einige Anwendungen von Satz 4 und seinem Korollar zur Sprache. Es sei X speziell eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit der Klasse C^k $(0 \leqq k \leqq \infty)$ und Γ eine eigentlich diskontinuierliche Gruppe von topologischen Selbstabbildungen der Klasse C^k von X, so daß X/Γ parakompakt ist. Wählt man dann in Satz 4 für W eine Überdeckung von X durch offene Koordinatenumgebungen W_i (Atlas), so ist mit W_i auch αW_i eine zulässige Koordinatenumgebung auf X. Daher liegen dann die sämtlichen Mengen αU_m einer Überdeckung A der im Satz genannten Art in Koordinatenumgebungen. Wählt man nun im Beweise des Korollars die Funktionen g_m aus $C^k(X)$, der Klasse der k-mal stetig differenzierbaren komplexwertigen Funktionen auf X, so erhält man eine im Sinne des Korollars zu A, B gehörige invariante Zerlegung der Eins mit Summanden f_m^α aus $C^k(X)$. — Ist h eine komplexwertige invariante Funktion auf der Mannigfaltigkeit X, also $h^\alpha = h$ für $\alpha \in \Gamma$, so liefert diese invariante Zerlegung der Eins eine Darstellung von h als bei Γ invariante Summe, deren Summanden $h f_m^\alpha$ dieselben Stetigkeitseigenschaften wie h besitzen. Ähnliches gilt für Funktionenvektoren, Tensoren, Differentialsymbole und andere Objekte an Stelle von h mit einem bestimmten Transformationsverhalten bei Γ [vgl. [4], (13) ff., wo eine Vorstufe zur invarianten Zerlegung der Eins benutzt wurde]. Umgekehrt kann die invariante Zerlegung der Eins zur Konstruktion von Funktionen (Tensoren usw.) mit vorgeschriebenen Transformationseigenschaften dienen (vgl. den Beweis von Satz 7). Schließlich kann man mit Hilfe invarianter Zerlegungen der Eins beweisen — und das ist sicherlich eine ihrer wichtigsten Anwendungen — daß in gewissen Integralen über Fundamentalbereiche von Γ partiell integriert werden kann, ohne daß dabei Randbeiträge auftreten. Diese Anwendung wird an anderer Stelle im Zusammenhang mit Differentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten mit diskontinuierlichen Gruppen ausführlich dargestellt werden.

§ 3. Die Parakompaktheit von X und von X/Γ

SATZ 5. *Unter den Voraussetzungen von Satz* 4 *ist* X *parakompakt.*

BEWEIS. Es sei $W = \{W_i | i \in \mathfrak{I}\}$ eine beliebige offene Überdeckung von X. Gemäß Satz 4, c) existiert eine offene Überdeckung $A = \{A_j | j \in \mathfrak{J}\}$ von X vom endlichen Typ, so daß die $\bar{A}_j$ kompakt sind. Zu jedem $j \in \mathfrak{J}$ existiert

ein endliches Indexsystem $\mathfrak{J}_j \subset \mathfrak{J}$, so daß

$$A_j \subset \bigcup_{i \in \mathfrak{J}_j} W_i .$$

Wir zeigen jetzt, daß die Mengenfamilie

$$V := \{A_j \cap W_i | j \in \mathfrak{J},\ i \in \mathfrak{J}_j\}$$

eine Verfeinerung von W vom endlichen Typ ist. Die Mengen der Familie V sind offen. Sie überdecken X, denn nach Definition von $\mathfrak{J}_j$ ist

$$A_j = \bigcup_{i \in \mathfrak{J}_j} (A_j \cap W_i),$$

und die A_j überdecken X. V ist offenbar eine Verfeinerung von W. Zum Nachweis, daß V vom endlichen Typ ist, seien $j_0 \in \mathfrak{J}$ und $i_0 \in \mathfrak{J}_{j_0}$ vorgegeben. Ist dann die Relation

$$(A_j \cap W_i) \cap (A_{j_0} \cap W_{i_0}) \neq \emptyset$$

mit gewissen $j \in \mathfrak{J}$ und $i \in \mathfrak{J}_j$ erfüllt, dann gibt es für j nur endlich viele Möglichkeiten, weil A vom endlichen Typ ist. Da ferner jede Menge $\mathfrak{J}_j$ endlich ist, gibt es also nur endlich viele Paare (j, i), so daß die obige Relation erfüllt ist, d.h. V ist vom endlichen Typ. Damit ist Satz 5 bewiesen.

Die genaue Antwort auf die Frage, ob X/Γ parakompakt ist, falls X parakompakt ist, kenne ich nicht. Es wird nur gezeigt

Satz 6. *Es sei X ein lokal-kompakter Hausdorffscher Raum, Γ eine eigentlich diskontinuierliche Gruppe von Homöomorphismen von X. Dann ist jede der folgenden sechs zusätzlichen Voraussetzungen hinreichend für die Parakompaktheit von X/Γ.*

a) X ist zusammenhängend,

b) X ist σ-kompakt,

c) Γ ist abzählbar,

d) X ist lokal-zusammenhängend,

e) X ist ein metrischer Raum und Γ eine Gruppe von Isometrien von X

f) X und Γ sind folgendermaßen gebildet. Es sei G eine lokal-kompakte topologische Gruppe, K eine kompakte und D eine diskrete Untergruppe von G; X sei der mit der Quotiententopologie ausgestattete homogene Raum $X = G/K$ der Linksrestklassen gK $(g \in G)$. Wendet man die Elemente $d \in D$ auf diese Restklassen im Sinne der Linksmultiplikation an, so liefern die Abbildungen

$$\gamma_d\colon\ gK \to (dg)K \tag{8}$$

eine Darstellung von D als eigentlich diskontinuierliche Gruppe von topologischen Selbstabbildungen von X. Γ sei mit dieser Darstellung identisch.

Beweis. Wegen der eigentlichen Diskontinuierlichkeit von Γ ist X/Γ zunächst Hausdorffsch; ferner lokal-kompakt. Da c) aus b) und b) wegen der Parakompaktheit von X aus a) folgt (vgl. [2], S. 107, Theorem 5), genügt es, die Fälle c) bis f) zu betrachten.

Zu c). Nach [2], loc.cit. ist X die topologische Summe einer Menge $\{X_i;\ i\in\mathfrak{I}\}$ von σ-kompakten offenen Teilmengen X_i. Dann ist auch jede Menge $Y_i:=\Gamma X_i$ $(i\in\mathfrak{I})$ σ-kompakt. Da ferner jedes Kompaktum C von Y_i nur mit endlich vielen X_j einen nichtleeren Durchschnitt hat, hat jedes Y_i nur mit abzählbar vielen X_j einen nichtleeren Durchschnitt. Also hat jedes Y_i auch nur mit abzählbar vielen Y_j $(j\in\mathfrak{I})$ einen nichtleeren Durchschnitt. Wir erklären jetzt für $i\in\mathfrak{I}$ und alle natürlichen Zahlen n induktiv

$$Z_{i1}:=Y_i,\qquad Z_{in}:=\bigcup_{Y_j\cap Z_{in-1}\neq\emptyset} Y_j\qquad (n\geqq 2).$$

Dann ist

$$Z_i:=\bigcup_{n\geqq 1} Z_{in}$$

offen, und die Relation $Z_i\cap Z_j\neq\emptyset$ $(i,j\in\mathfrak{I})$ hat $Z_i=Z_j$ zur Folge. Da jedes Z_{in} die Vereinigung von nur abzählbar vielen Y_j ist (vollständige Induktion nach n), ist Z_i σ-kompakt. Ferner ist $Z_i=\Gamma Z_i$. Also ist X die topologische Summe der Verschiedenen unter den Z_i, und durch Anwendung der natürlichen Abbildung π von X auf X/Γ erhält man eine Darstellung von X/Γ als topologische Summe von σ-kompakten Teilmengen, womit die Parakompaktheit von X/Γ bewiesen ist.

Im Falle d), daß X lokal-zusammenhängend ist, sind die zusammenhängenden Komponenten von X zugleich abgeschlossen und offen und wegen der Parakompaktheit von X also parakompakt. Wegen [2], loc.cit. sind sie also σ-kompakt. Γ permutiert sie. Es gibt daher eine Familie $\{K_i|\,i\in\mathfrak{I}\}$ von zusammenhängenden Komponenten von X, so daß

$$X=\bigcup_{i\in\mathfrak{I}}\Gamma K_i\quad\text{und}\quad K_i\cap\Gamma K_j=\emptyset\quad\text{für}\quad i\neq j\quad (i,j\in\mathfrak{I}).$$

Die Bilder $\pi K_i\subset X/\Gamma$ $(i\in\mathfrak{I})$ sind dann offen, paarweise punktfremd, und ihre topologische Summe ist gleich X/Γ. Da die πK_i auch σ-kompakt sind, folgt nun die Parakompaktheit von X/Γ aus [2], loc.cit.

Im Falle e) sei zunächst daran erinnert, daß jeder metrische Raum parakompakt ist (s. z.B. [3], S. 160) und daß jede diskontinuierliche Gruppe von Isometrien eines metrischen Raumes eigentlich diskontinuierlich ist. Es bezeichne nun $|x,y|$ den Abstand von x, $y\in X$. Wegen der Diskontinuierlichkeit von Γ ist dann X/Γ mit der Abstandsdefinition

$$|\pi x,\pi y|:=\inf\{|x,\alpha y|;\ \alpha\in\Gamma\}\qquad (x,y\in X)$$

selbst ein metrischer Raum und somit parakompakt.

Zu f). Wir schließen nach dem Vorbild von [3], S. 172. Es sei M eine kompakte Umgebung des Einselementes von G, welche K enthält, und es sei $M=M^{-1}$. Dann stellt

$$H:=\bigcup_{\nu=1}^{\infty} M^\nu$$

eine offene und daher zugleich abgeschlossene σ-kompakte Untergruppe von G dar, die K enthält. D permutiert die Linksrestklassen von G nach H.

Daher gibt es eine Zerlegung von G in der Gestalt

$$G = \bigcup_{i \in \mathfrak{J}} D g_i H; \tag{9}$$

dabei ist $\mathfrak{J}$ eine Indexmenge, $g_i \in G$ und

$$D g_i H \cap D g_j H = \emptyset \quad \text{für} \quad i, j \in \mathfrak{J}, \quad i \neq j. \tag{10}$$

Es bezeichne nun $\varphi\colon G \to X$ die kanonische Abbildung von G auf $X = G/K$. Dann folgt aus (10) und (9)

$$X = \bigcup_{d \in D} \bigcup_{i \in \mathfrak{J}} \varphi(d g_i H).$$

Offenbar ist

$$\varphi(d g_i H) = \gamma_d \varphi(g_i H)$$

mit γ_d aus (8). Damit haben wir

$$X = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma \Big(\bigcup_{i \in \mathfrak{J}} \varphi(g_i H) \Big).$$

Daraus folgt

$$X/\Gamma = \pi X = \bigcup_{i \in \mathfrak{J}} \pi \varphi(g_i H). \tag{11}$$

Wegen (10) handelt es sich hier um eine Zerlegung von X/Γ. Wegen der Offenheit und der σ-Kompaktheit von H und wegen der Offenheit und der Stetigkeit der Abbildungen π, φ sind die Mengen $\pi\varphi(g_i H)$ offen und σ-kompakt, und wir haben in (11) eine Darstellung von X/Γ als topologische Summe von σ-kompakten Teilräumen. Nach [2], loc. cit. ist damit die Parakompaktheit von X/Γ bewiesen. Insbesondere haben wir bewiesen, daß schon $X = G/K$ unter den angegebenen Voraussetzungen über G und K parakompakt ist. — Satz 6 ist nun vollständig bewiesen.

§ 4. Vollständige invariante Maßbestimmungen auf Mannigfaltigkeiten

Wir benutzen jetzt Satz 4 zur Konstruktion einer invarianten definiten Riemannschen Maßbestimmung (Maßtensor G) auf einer zusammenhängenden Mannigfaltigkeit X, so daß (X, G) eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit wird im folgenden Sinne. Da G definit sein soll, wird X zu einem metrischen Raum unter der Metrik $|x, y|_G$ $(x, y \in X)$, definiert als untere Grenze der Längen aller stückweise stetig differenzierbaren Verbindungskurven von x, y. (X, G) heißt vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit, wenn dieser metrische Raum vollständig ist in dem Sinne, daß jede Cauchy-Folge bezüglich $|x, y|_G$ einen Limes in X hat. Damit gleichwertig ist die Bedingung, daß die Kugeln

$$K_G(z; r) := \{x;\ x \in X,\ |x, z|_G \leqq r\}$$

für alle $z \in X$ und $r \geqq 0$ kompakt sind (s. H. Hopf und W. Rinow [9]).

Satz 7. *Es sei X eine zusammenhängende bel. diffb. (beliebig oft differenzierbare) n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit abzählbarer Topologie; Γ sei*

eine eigentlich diskontinuierliche Gruppe von bel. diffb. Homöomorphismen von X. Dann gibt es einen bel. diffb., bei Γ invarianten definiten Maßtensor G auf X, so daß (X, G) eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit ist. — Ist ferner auf X ein bel. diffb. invariantes positives Volumenelement dx vorgegeben[2]*), so kann G im Falle $n \geqq 2$ noch so gewählt werden, daß das durch G gelieferte Volumenelement mit dx übereinstimmt. Im Falle $n=1$ ist G durch die Vorgabe seines Volumenelementes eindeutig bestimmt, also Vollständigkeit von (X, G) im allgemeinen nicht gleichzeitig vorhanden.*

BEWEIS. Da X als lokal-kompakter Hausdorffscher Raum mit abzählbarer Topologie parakompakt ist, erhält man zunächst mit Hilfe von Satz 6, a), b) oder *d*) die Parakompaktheit von X/Γ. Die Voraussetzungen von Satz 4 sind also erfüllt. Es sei nun W irgendeine offene Überdeckung von X durch Koordinatenumgebungen, und U, V seien Familien von Teilmengen (Indexmenge $\mathfrak{M}$) und A, B Überdeckungen von X, so daß die Aussagen von Satz 4 gelten. Jede Menge $\overline{U}_m$ $(m \in \mathfrak{M})$ liegt dann im (offenen) Definitionsbereich eines lokalen Koordinatensystems $\varkappa_m$ von X. Die Richtung der Koordinatenabbildung $\varkappa_m$ sei $X \to R^n$ (R reeller Zahlkörper). Zu jedem $m \in \mathfrak{M}$ gibt es einen bel. diffb. nichtnegativ-definiten Maßtensor G_m auf X, so daß gilt

$$G_m > 0 \quad \text{in} \quad \overline{V}_m, \tag{12}$$

$$G_m = 0 \quad \text{in} \quad X - U_m. \tag{13}$$

Wir können dann noch erreichen

$$\{y;\ |y, x|_m \leqq 2\} < U_m \quad \text{für alle } m \in \mathfrak{M} \text{ und } x \in V_m. \tag{14}$$

Denn es ist $\overline{V}_m < U_m$, und wegen (12) gilt $G_m > 0$ auch noch in einer kleinen Umgebung von $\overline{V}_m$, so daß G_m nötigenfalls nur mit einer hinreichend großen positiven Konstanten multipliziert zu werden braucht.

Ist H ein Tensor auf X, so sei allgemein H^α $(\alpha \in \Gamma)$ derjenige Tensor, der in einem beliebigen Koordinatensystem $\varkappa$ von X dieselben Komponenten hat wie H im Koordinatensystem $\varkappa\alpha^{-1}$. Da die Überdeckung A vom endlichen Typ ist, und wegen (13) ist nun der Tensor

$$G := \sum_{\substack{\alpha \in \Gamma \\ m \in \mathfrak{M}}} G_m^\alpha$$

auf X wohl definiert, bel. diffb. und invariant bei Γ. Wegen (12) und $G_m \geqq 0$, und da B eine Überdeckung von X ist, ist G ferner definit. Wir weisen nach, daß die Riemannsche Mannigfaltigkeit (X, G) vollständig ist, indem wir zeigen, daß die Kugeln

$$K_G(z; i) := \{x;\ |x, z|_G \leqq i\} \qquad (z \in X;\ i = 0, 1, 2, \ldots) \tag{15}$$

kompakt sind.

---

[2]) In einem System $\varkappa$ von lokalen Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ auf X hat also dx die Darstellung $dx|_\varkappa = p(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$ mit einer bel. diffb. positiven Funktion p mit dem üblichen Transformationsverhalten. — Die Differenzierbarkeitsvoraussetzungen des Satzes könnten übrigens weitgehend gemildert werden.

Zunächst gilt wegen (14) und der Konstruktion von G

(16) $\qquad K_G(x;2) < \alpha U_m \quad$ für $\quad x \in \alpha V_m, \qquad \alpha \in \Gamma, \qquad m \in \mathfrak{M}.$

Wir definieren nun induktiv

$$T_0 := \{z\}, \qquad T_i := \bigcup_{\alpha V_m \cap T_{i-1} \neq \emptyset} \alpha \overline{U}_m \qquad (i \geqq 1).$$

Da A vom endlichen Typ ist, ist jedes T_i die Vereinigung von nur endlich vielen Mengen $\alpha \overline{U}_m$ (vollst. Induktion) und ist daher kompakt. Die Kugeln (15) sind daher kompakt, wenn wir zeigen

(17) $\qquad K_G(z;i) < T_i \qquad (i \geqq 0).$

Wir schließen mit vollständiger Induktion. Die Inklusion ist erfüllt für $i=0$. Angenommen sie ist für ein bestimmtes $i \geqq 0$ erfüllt. Es sei dann $y \in K_G(z; i+1)$ vorgegeben. Aus der Definition von $|z, y|_G$ folgt die Existenz eines $x \in K_G(z; i)$, so daß

(18) $\qquad y \in K_G(x;2).$

Nach Induktionsvoraussetzung ist $x \in T_i$. Da B eine Überdeckung von X ist, ist ferner $x \in \alpha V_m$ für ein gewisses Paar $(\alpha, m) \in \Gamma \times \mathfrak{M}$. Dann ist $\alpha \overline{U}_m < T_{i+1}$. Nach (16) und (18) ist aber $y \in \alpha U_m$. Damit haben wir insgesamt $y \in T_{i+1}$, und da y ein beliebiger Punkt von $K_G(z; i+1)$ war, ist der Induktionsbeweis von (17) beendet.

Nun zu der Aussage bezüglich des Volumenelementes dx. Die Bemerkung zum Fall $n=1$ ist trivial. Es sei jetzt $n \geqq 2$. Wir wählen auf Grund des eben Bewiesenen einen bel. diffb., bei Γ invarianten definiten Maßtensor H auf X, derart daß (X, H) vollständig ist. $|x, y|_H$ sei die zugehörige Metrik auf X, und $z \in X$ sei fest gewählt. Man konstruiert dann mit Hilfe von Satz 4 eine reelle, bei Γ invariante Funktion $j \in C^\infty(X)$, so daß gilt

(19) $\qquad j \geqq 0, \qquad j(z) = 0;$

(20) $\qquad j(x) \geqq |x, \Gamma z|_H - 1 \quad$ für $\quad x \in X,$

mit

$$|x, \Gamma z|_H := \inf\{|x, \alpha z|_H;\ \alpha \in \Gamma\}.$$

Die Konstruktion von j verläuft wie folgt. Es sei W die aus den offenen Mengen

$$W_1 := \{x; |x, \Gamma z|_H < 1\}, \qquad W_2 := \{x; |x, \Gamma z|_H > \tfrac{1}{2}\}$$

bestehende Überdeckung von X, und U, V seien gemäß Satz 4 hinzubestimmte Familien mit der Indexmenge $\mathfrak{M}$. Nach § 2, Ende, existiert eine invariante Zerlegung der Eins,

$$1 = \sum_{\substack{\alpha \in \Gamma \\ m \in \mathfrak{M}}} f_m^\alpha,$$

mit $f_m \in C^\infty(X)$, $f_m \geqq 0$ und $f_m(x) > 0$ für $x \in \overline{V}_m$, $f_m(x) = 0$ für $x \notin U_m$. Wir definieren nun

$$\mathfrak{L} := \{m;\, m \in \mathfrak{M},\, U_m \subset W_2\}$$

$$c_m := \frac{\sup\{|y, \Gamma z|_H;\, y \in V_m\}}{\inf\{f_m(y);\, y \in V_m\}} \quad (m \in \mathfrak{M}) \tag{21}$$

und zeigen, daß die Funktion

$$j := \sum_{\substack{\alpha \in \Gamma \\ m \in \mathfrak{L}}} c_m f_m^\alpha \tag{22}$$

die gewünschten Eigenschaften hat. $j \in C^\infty(X)$, die Invarianz bei Γ und (19) sind unmittelbar klar. Zum Nachweis von (20) sei zunächst $x \in W_1$. Dann ist (20) offenbar erfüllt. Ist nun zweitens $x \notin W_1$, so gilt, da B eine Überdeckung von X ist, $x \in \alpha^{-1} V_m$ für ein geeignetes Paar $(\alpha, m) \in \Gamma \times \mathfrak{M}$. Hier ist sogar $m \in \mathfrak{L}$. Denn andernfalls wäre $U_m \not\subset W_2$, also $U_m \subset W_1$ und wegen der Invarianz von W_1 auch $\alpha^{-1} U_m \subset W_1$ und $x \in W_1$ im Widerspruch zur Annahme. Der zu diesem Paar (α, m) gehörige Beitrag $c_m f_m^\alpha$ zum Ausdruck (22) für $j(x)$ ist dann zufolge (21) mindestens gleich $|x, \Gamma z|_H$, so daß (20) wiederum erfüllt ist. Also hat j die gewünschten Eigenschaften.

Es sei jetzt J der Maßtensor auf X, dessen Komponenten in Bezug auf lokale Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ die Zahlen $\frac{\partial j}{\partial x_\mu} \frac{\partial j}{\partial x_\nu}$ $(1 \leqq \mu, \nu \leqq n)$ sind. J ist semidefinit (wegen $n \geqq 2$ nicht definit), bel. diffb. und invariant. Die zugehörige Quasimetrik bezeichnen wir mit $|x, y|_J$. Für alle $x \in X$ ist dann

$$|x, \Gamma z|_J \geqq |x, \Gamma z|_H - 1. \tag{23}$$

Denn für die Länge einer beliebigen von einem Punkt $y \in \Gamma z$ nach x führenden stückweise stetig differenzierbaren Kurve C auf (X, J) findet man unter Benutzung von lokalen Koordinaten und einer Parameterdarstellung sofort die untere Schranke $|j(x) - j(y)|$; wegen (19) und der Invarianz von j ist hier $j(y) = 0$, und wegen $j \geqq 0$ und (22) folgt die Behauptung (23). — Für jede positive invariante Funktion $u \in C^\infty(X)$ ist

$$F := J + uH \tag{24}$$

ein bel. diffb. invarianter definiter Maßtensor. Der Quotient $\frac{dx}{dx_F}$ des vorschriebenen Volumenelementes dx mit dem zu F gehörigen Element dx_F ist eine positive invariante Funktion aus $C^\infty(X)$. Da die Komponentenmatrix $\left(\frac{\partial j}{\partial x_\mu} \frac{\partial i}{\partial x_\nu}\right)$ von J ausgeartet ist, erkennt man mit Hilfe von Satz 4 leicht, daß u in (24) so gewählt werden kann, daß gilt

$$\frac{dx}{dx_F} \geqq 1. \tag{25}$$

Dann ist

$$G := \left(\frac{dx}{dx_F}\right)^{2/n} F$$

ein positiv-definiter bel. diffb. invarianter Maßtensor mit dem Volumenelement dx. Es bleibt die Vollständigkeit von (X, G) nachzuweisen. Wegen (25) genügt es zu zeigen, daß (X, F) vollständig ist. Es genügt dafür, die Kompaktheit der Kugeln

$$K_F(z; r) := \{x; |x, z|_F \leqq r\} \qquad (r \geqq 0)$$

zu zeigen. Es sei dazu eine Zahl $r \geqq 0$ und eine Folge x_i $(i \geqq 1)$ in $K_F(z; r)$ vorgegeben. Wir müssen zeigen, daß die Folge x_i einen Häufungspunkt hat. Wir wählen für jedes i eine von z nach x_i laufende stückweise stetig differenzierbare Kurve C_i mit einer Länge

$$|C_i|_F \leqq r + 1 \quad \text{auf } (X, F). \tag{26}$$

Für die Länge auf (X, J) gilt dann erst recht $|C_i|_J \leqq r+1$, d.h. $C_i < K_J(z; r+1)$ für alle $i \geqq 1$. Mit (23) folgt

$$C_i < \Gamma K_H(z; r+2).$$

$K_H(z; r+2)$ ist kompakt wegen der Vollständigkeit von (X, H). Daher hat u in $K_H(z; r+2)$ eine positive untere Grenze ε. Da u invariant ist, ist ε zugleich die untere Grenze von u in $\Gamma K_H(z; r+2)$. Daher erhalten wir mit Hilfe von (26) und (24)

$$r + 1 \geqq |C_i|_F \geqq |C_i|_{uH} \geqq \sqrt{\varepsilon}\, |C_i|_H.$$

Daraus folgt

$$|x_i, z|_H \leqq \frac{r+1}{\sqrt{\varepsilon}} \quad \text{für} \quad i \geqq 1.$$

Wegen der Vollständigkeit von (X, H) hat also die Folge x_i einen Häufungspunkt. Das beendet den Beweis der Vollständigkeit von (X, G) und zugleich den Beweis von Satz 7.

Ist wie in Satz 7, zweiter Teil, auf einer Mannigfaltigkeit X ein Volumenelement dx ausgezeichnet, so gehört zu jedem Differentialsymbol (auch formaler Differentialoperator genannt) auf X ein adjungiertes Differentialsymbol. Die zweite Aussage von Satz 7 zeigt nun, daß die Betrachtung von Differentialsymbolen und ihren Adjungierten auf vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeiten im Falle $n \geqq 2$ nicht spezieller ist als auf den Mannigfaltigkeiten (X, dx) mit Volumenelement und den Voraussetzungen von Satz 7.

Aus der ersten Aussage von Satz 7 folgt die Möglichkeit, einen Fundamentalbereich von Γ in X als Normalpolyeder mit den in [1], Satz 5 bis 7 nachgewiesenen Eigenschaften zu konstruieren. Insbesondere ist also die Fixpunktmenge von Γ in X eine Nullmenge. Dabei definieren wir wie üblich: Eine Teilmenge einer Mannigfaltigkeit der Klasse C^1 heißt (Lebesguesche) Nullmenge, wenn ihr Durchschnitt mit dem Definitionsbereich eines jeden lokalen Koordinatensystems $\varkappa$ von X in den Koordinaten von $\varkappa$ als Lebesguesche Nullmenge erscheint. — Aus dieser Definition folgt, daß $N < X$ dann und nur dann eine Nullmenge ist, wenn zu jedem $x \in X$ (oder auch nur zu jedem $x \in N$) eine Umgebung U von x und ein auf U definiertes Koordinatensystem $\varkappa$

existiert, so daß $\varkappa(U \cap N)$ eine Menge vom Lebesgueschen Maß 0 darstellt. Falls auf X ein positives stetiges Volumenelement dx ausgezeichnet ist, sind die Nullmengen von X identisch mit den Mengen vom Maß 0 in Bezug auf das durch dx gelieferte total-additive Maß auf X.

§ 5. Über periodische Transformationen und die Fixpunktmenge von diskontinuierlichen Gruppen auf Mannigfaltigkeiten

Am Ende des vorigen Paragraphen haben wir gesehen, daß die Fixpunktmengen von diskontinuierlichen Gruppen auf Mannigfaltigkeiten unter den Voraussetzungen von Satz 7 Nullmengen sind. Wir beweisen diese Aussage jetzt noch einmal direkter und unter abgeschwächten Voraussetzungen. — Zunächst ein allgemeiner Satz über periodische Transformationen.

SATZ 8. *Es sei X eine zusammenhängende n-dimensionale Mannigfaltigkeit der Klasse C^1, und α sei eine stetig differenzierbare Selbstabbildung von X von endlicher Ordnung p, also $\alpha^p = \iota$ (Identität). α besitze einen Fixpunkt $a \in X$ und lasse den Tangentialvektorraum in a elementweise fest. Dann ist $\alpha = \iota$.*

BEWEIS. Es sei $\varkappa$ ein lokales Koordinatensystem auf einer Umgebung U von a, derart daß

$$\varkappa(a) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in R^n.$$

Es sei dann V eine Umgebung von a, so daß $\alpha^k V \subset U$ für $1 \leqq k \leqq p$. Für $x \in V$ sei $\mathfrak{x} := \varkappa(x)$ der als Spalte aufgefaßte Koordinatenvektor von x, und

$$\alpha^k(\mathfrak{x}) := \varkappa(\alpha^k x).$$

Da α den Tangentialraum in a fest läßt, ist dann

$$\alpha(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x} + \beta(\mathfrak{x}) \tag{27}$$

mit einem stetig differenzierbaren Vektor $\beta(\mathfrak{x})$ mit der Eigenschaft

$$\beta(\mathfrak{x}) = o(\mathfrak{x}) \tag{28}$$

im Sinne von

$$\lim_{\mathfrak{x} \to 0} \frac{\beta(\mathfrak{x})}{|\mathfrak{x}|} = 0.$$

Wir zeigen nun durch vollständige Induktion

$$\alpha^k(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x} + k\beta(\mathfrak{x}) + o\big(\beta(\mathfrak{x})\big) \qquad (\mathfrak{x} \to 0;\ k \geqq 1). \tag{29}$$

Nach (27) ist diese Aussage für $k = 1$ richtig. Aus ihrer Gültigkeit für ein bestimmtes k folgt mit Hilfe von (27)

$$\begin{aligned} \alpha^{k+1}(\mathfrak{x}) = \alpha^k[\mathfrak{x} + \beta(\mathfrak{x})] &= [\mathfrak{x} + \beta(\mathfrak{x})] + k\beta[\mathfrak{x} + \beta(\mathfrak{x})] + o\{\beta[\mathfrak{x} + \beta(\mathfrak{x})]\} \\ &= \mathfrak{x} + \beta(\mathfrak{x}) + k\{\beta(\mathfrak{x}) + B(\mathfrak{x})\beta(\mathfrak{x}) + o\big(\beta(\mathfrak{x})\big)\} + \\ &\quad + o\{\beta(\mathfrak{x}) + B(\mathfrak{x})\beta(\mathfrak{x}) + o\big(\beta(\mathfrak{x})\big)\}, \end{aligned}$$

wobei $B(\xi)$ die Funktionalmatrix der Abbildung β an der Stelle ξ bezeichnet. Wegen (28) ist $B(0)=0$, wegen der stetigen Differenzierbarkeit von β also $B(\xi)=o(1)$. Wir erhalten damit aus der letzten Gleichung die Gültigkeit von (29) mit $k+1$ an Stelle von k, und damit ist (29) bewiesen. Aus (29) folgt für $k=p$ wegen $\alpha^p=\iota$

$$\beta(\xi)=o\big(\beta(\xi)\big) \qquad (\xi\to 0).$$

Das bedeutet, daß β auf einer hinreichend kleinen Umgebung von $\xi=0$ im R^n verschwindet. Nach (27) gibt es also eine Umgebung W von a, so daß $\alpha x=x$ für $x\in W$. Nach einem Satz von M. H. Newman [6] folgt hieraus bereits $\alpha=\iota$. Der Satz von Newman benutzt nicht die Differenzierbarkeit von α, sondern (außer $\alpha^p=\iota$) nur, daß α eine topologische Abbildung ist. Man kommt auch ohne diesen nicht ganz leicht zu beweisenden Satz unter nochmaliger Ausnutzung der Differenzierbarkeit von α wie folgt schnell zum Ziel. Es sei A die Menge der Fixpunkte von α. Wir haben soeben $\mathring{A}\neq\emptyset$ erhalten. Angenommen es ist $A\neq X$. Dann existiert ein $x\in \mathrm{Rd}\,\mathring{A}$, eine Umgebung U von x und ein Koordinatensystem $\varkappa$, so daß $\varkappa U=R^n$. Es gibt dann eine abgeschlossene Kugel $K\subset R^n$, so daß $\varkappa^{-1}\mathring{K}\subset\mathring{A}$ und

$$\mathrm{Rd}\,(\varkappa^{-1}K)\cap\mathrm{Rd}\,\mathring{A}\neq\emptyset.$$

Ist nun b ein beliebiger Punkt aus dem letzteren Durchschnitt, so läßt α den Tangentialraum in b fest, da $\varkappa^{-1}K$ fest bleibt. Daher folgt auf Grund des ersten Teiles dieses Beweises $b\in\mathring{A}$ im Widerspruch zu $b\in\mathrm{Rd}\,A$. Also muß $A=X$ sein, q.e.d.

Jetzt erhalten wir auf einfache Weise den angekündigten

Satz 9. *Es sei X eine zusammenhängende n-dimensionale Mannigfaltigkeit der Klasse C^1 und Γ eine Gruppe von stetig differenzierbaren Homöomorphismen von X. Γ sei entweder eigentlich diskontinuierlich oder aber diskontinuierlich und abzählbar. Dann ist die Fixpunktmenge von Γ in X eine Nullmenge.*

Beweis. 1. Γ sei eigentlich diskontinuierlich. Für jedes $\alpha\in\Gamma$ bezeichne A_α die abgeschlossene Menge der Fixpunkte von α. Die Fixpunktmenge von Γ ist dann definitionsgemäß gleich $\bigcup_{\substack{\alpha\in\Gamma\\ \alpha\neq\iota}} A_\alpha$. Es sei nun $x\in X$ beliebig vorgegeben, $\varkappa$ irgendein Koordinatensystem zu x und V sein Definitionsbereich. Nach Satz 1 existiert eine offene Umgebung U von x, $U\subset V$, so daß $U\cap A_\alpha\neq\emptyset$ nur für endlich viele $\alpha\in\Gamma$ gilt. Nach § 4, Ende, genügt es nun zu zeigen, daß $\varkappa(U\cap A_\alpha)$ für jedes $\alpha\in\Gamma$, $\alpha\neq\iota$, eine Lebesguesche Nullmenge ist. Diese Mengen sind jedenfalls Lebesguesch meßbar. Wir schließen jetzt indirekt: Angenommen es gibt ein $\alpha\in\Gamma$, $\alpha\neq\iota$, so daß die Menge $\varkappa(U\cap A_\alpha)$ ein positives Maß hat. Sie besitzt dann einen Dichtepunkt d (s. S. Saks [7], Kap. III, § 6). Dann ist $\varkappa^{-1}(d)$ ein Fixpunkt von α, und die Wirkung von α auf den Tangentialraum in $\varkappa^{-1}(d)$ ist offenbar die Identität. α besitzt wegen der Diskontinuierlichkeit von Γ eine endliche Ordnung. Satz 8 liefert jetzt $\alpha=\iota$ im Widerspruch zur Annahme.

2. Γ sei diskontinuierlich und abzählbar. Es genügt dann zu zeigen, daß jedes A_α, $\alpha \neq \iota$, eine Nullmenge ist. Das kann wieder mit dem zuletzt ausgeführten indirekten Schluß geschehen oder auch mit dem folgenden Schluß, der auch schon zuvor hätte angewandt werden können: Ist $\alpha \in \Gamma$, $\alpha \neq \iota$, und betrachtet man die Gleichung $\alpha x = x$ in lokalen Koordinaten in der Umgebung eines beliebigen Punktes $a \in A_\alpha$, so ist die Funktionalmatrix von α in a wegen Satz 8 von der Einheitsmatrix verschieden, und der Hauptsatz über implizite Funktionen liefert, daß A_α in einer hinreichend kleinen Umgebung von a eine $(n-1)$-dimensionale stetig differenzierbare Fläche in X und damit eine Nullmenge darstellt. Daraus folgt, daß A_α selbst eine Nullmenge ist. — Damit ist Satz 9 bewiesen.

Bezüglich Fixpunktmengen von Isometrien auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten vgl. S. KOBAYASHI [8]. — Die Aussage von Satz 9 benötigt man z.B. für Integralumformungen der Art

$$\int_X g\,dx = \int_{\bigcup_{\alpha\in\Gamma} \alpha F} g\,dx = \int_F \sum_{\alpha\in\Gamma} g^\alpha\,dx$$

(dx invariant bei Γ, F meßbare Fundamentalmenge von Γ in X).

Literatur

[1] ROELCKE, W.: Über Fundamentalbereiche diskontinuierlicher Gruppen. Math. Nachr. **20**, 329—355 (1959).

[2] BOURBAKI, N.: Topologie générale, Kap. I. Paris 1951.

[3] KELLEY, J. O.: General topology. Princeton 1955.

[4] ROELCKE, W.: Über den Laplace-Operator auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten Math. Nachr. **21**, 131—149 (1960).

[5] HOPF, H., u. W. RINOW: Über den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Fläche. Comm. Mat. Helv. **3**, 209—225 (1931).

[6] NEWMAN, M. H.: A theorem on periodic transformations of spaces. Quart. J. Math., Oxford ser. **2**, 1—8 (1931).

[7] SAKS, S.: Théorie de l'integrale. Warschau 1933.

[8] KOBAYASHI, S.: Fixed points of isometries. Nagoya Math. J. **13**, 63—68 (1958).

Münster i. W., 2. Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 20. April 1960)

Tomić, M.
Math. Zeitschr. 75, 53—56 (1961)

Über trigonometrische Sinus-Reihen mit positiven Koeffizienten

Von
Miodrag Tomić

Das Riemannsche Summierungs-Verfahren (R_2) ist folgendermaßen erklärt: Eine Folge s_n ist R_2-summierbar: $s_n \to s\,(R_2)$ wenn

$$\lim_{h\to 0} \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\,h}{n^2\,h}\, s_n \to s\,.$$

Dann folgt bekanntlich [*1*, S. 301]

$$(a) \qquad s_n \to s\,(R_2) \quad \text{und} \quad s_n = O(1) \Rightarrow s_n \to s\,(C,\,1)\,.$$

Man kann das Verfahren (R_2) auch folgendermaßen interpretieren. Es sei $f(\vartheta)$ eine ungerade Funktion und $S(\vartheta) = \sum b_\nu \sin \nu\,\vartheta$ ihre formale Fourier-Sinus-Reihe. Es existiere

$$(b) \qquad \frac{1}{\vartheta} \int_0^{\vartheta} f(t)\,dt = \frac{2}{\pi\,\vartheta} \sum \frac{b_n}{n}\,(1 - \cos n\,\vartheta) \to s\,, \qquad \vartheta \to +0\,.$$

Nach Hardy und Rogosinski [*2*] gilt: Ist $n\,b_n \geqq -1$, dann ist $n\,b_n \to s\,(C,\,1)$ notwendig und hinreichend für (b), und daraus folgt (a) mit einseitiger Verallgemeinerung, falls $n\,b_n = s_n$, $\vartheta = 2h$. Wenn jetzt die Grenze auf der rechten Seite in (b) existiert, nicht nur für $\vartheta \to +0$, sondern auch für alle ϑ aus $(0,\,\varepsilon)$, dann folgt die Konvergenz von $\sum b_\nu/\nu$ ohne zusätzlichen Bedingungen über b_ν [*1*, S. 366]. Wohlbekannt ist, daß diese Konvergenz trivialerweise stattfindet, wenn $S(\vartheta) = \sum b_\nu \sin \nu\,\vartheta$ die Fourier-Reihe einer ungeraden L-integrierbaren Funktion in $(0,\,\pi)$ ist.

Anstatt der Konvergenz der rechten Seite in (b) für alle ϑ aus $(0,\,\varepsilon)$ wird in der vorliegenden Note nur vorausgesetzt, daß die Teilsummen von $S(\vartheta) = \sum b_\nu \sin \nu\,\vartheta$ in $(0,\,\varepsilon)$, $\varepsilon < \pi$, L-integrierbar sind. Dann wird die Aufgabe behandelt, Bedingungen zu finden, aus welchen die Konvergenz von $\sum b_\nu/\nu$ folgt. In dieser Richtung wird folgender Satz bewiesen.

Satz. *Es sei* $(*)$ $\sum b_\nu \sin \nu\,x$ *eine trigonometrische Reihe mit nichtnegativen Koeffizienten* $b_\nu \geqq 0$, *oder allgemeiner* $b_\nu \geqq -\lambda_\nu$, *wo* λ_ν *eine monotone, gegen Null fallende Folge ist, mit* $\sum \lambda_\nu/\nu < \infty$; *und es sei für ein festes* $\varepsilon < \pi$

$$(1) \qquad \int_0^{\varepsilon} |s_n(x)|\,dx = O(1)\,,$$

wo $s_n(x)$ die Teilsummen von (*) bedeutet. Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}. \tag{2}$$

Wenn $b_\nu \downarrow 0$ folgt der Satz (zum Beispiel) unmittelbar aus der Tatsache, daß dann $|\sum b_\nu \sin \nu x| \leqq b_1/\sin\frac{x}{2}$ in (ε, π), also wegen (1) $f(x) \in L(0, \pi)$.

Für den Beweis des oben genannten Satzes benützen wir die Wienersche Methode, und zwar in ihrer einfachsten elementaren Form, die von HEILBRONN und LANDAU in [3], [4] gegeben ist.

BEWEIS DES SATZES. Setzen wir zuerst $b_\nu \geqq 0$, voraus, dann brauchen wir nur die folgende elementare Formel aus [3, S. 12], [4]:

$$\left\{\begin{aligned} \int_0^\lambda \left(1-\frac{\varphi}{\lambda}\right)\cos\alpha\varphi\, d\varphi &= \left\{\left(1-\frac{\varphi}{\lambda}\right)\frac{\sin\alpha\varphi}{\alpha} - \frac{\cos\alpha\varphi}{\lambda\alpha^2}\right\}_0^\lambda \\ &= \frac{2\sin^2\frac{\alpha\lambda}{2}}{\alpha^2\lambda} < \frac{2}{\alpha^2\lambda}, \qquad \alpha \gtrless 0. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Es sei $m = m(\varepsilon)$ eine ganze Zahl, die später festgesetzt wird. (1) und eine bekannte Abschätzung geben für $0 \leqq x \leqq \varepsilon$

$$\int_0^\varepsilon \left|\sum_{k=m}^{n} b_k \sin kx\right| dx < 2M, \qquad \left|\sum_{k=m}^{n} \frac{\sin kx}{k}\right| < 2K, \tag{4}$$

wo K und M von n und m unabhängig sind.

Aus

$$S_n = \int_0^\varepsilon \left(\sum_{k=m}^{n} b_k \sin kx\right)\left(\sum_{k=m}^{n} \frac{\sin kx}{k}\right)\left(1-\frac{x}{\varepsilon}\right) dx \tag{5}$$

folgt wegen (4) $|S_n| < 4KM$.

Anderseits, man kann S_n wie folgt ausrechnen

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^\varepsilon \sum_{k=m}^{n} \frac{b_k}{k}\left(1-\frac{x}{\varepsilon}\right)\sin^2 kx\, dx + \\ &+ \int_0^\varepsilon \sum_{\substack{k,p=m \\ k\neq p}}^{n} \frac{b_k}{p}\left(1-\frac{x}{\varepsilon}\right)\sin kx \sin px\, dx = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Wegen (3) ist

$$\int_0^\varepsilon \left(1-\frac{x}{\varepsilon}\right)\sin^2 kx\, dx = \frac{1}{2}\int_0^\varepsilon \left(1-\frac{x}{\varepsilon}\right)(1-\cos 2kx)\, dx \geqq \frac{\varepsilon}{4} - \frac{1}{2k^2\varepsilon}.$$

Wir lassen nur diejenige k zu, für welche $(k^2\varepsilon)^{-1} < \varepsilon^5$, d.h. $k > \varepsilon^{-3}$. Es sei $m = m(\varepsilon)$ die kleinste solche Zahl k. Wir haben dann

$$I_1 \geqq \left(\frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon^5}{2}\right)\sum_{k=m}^{n} \frac{b_k}{k}. \tag{6}$$

Andererseits ist

$$(7)\qquad I_2 = \frac{1}{2}\int_0^{\varepsilon} \sum_{\substack{k,p=m \\ k\neq p}}^{n} \frac{b_k}{p}\left(1-\frac{x}{\varepsilon}\right)\{\cos(k-p)\,x - \cos(k+p)\,x\}\,dx = I_2' - I_2'',$$

mit

$$I_2'' = \frac{1}{2}\int_0^{\varepsilon} \sum_{\substack{k,p=m \\ k\neq p}}^{n} \frac{b_k}{p}\left(1-\frac{x}{\varepsilon}\right)\cos(k+p)\,x\,dx.$$

Nochmalige Anwendung der Formel (3) auf I_2'' gibt

$$I_2'' < \frac{1}{2}\sum_{\substack{k,p=m \\ k\neq p}}^{n} \frac{b_k}{p}\,\frac{1}{(k+p)^2\,\varepsilon} < \frac{1}{2m\,\varepsilon}\sum_{k=0}^{n-m} b_{m+k}\left(\sum_{r=k}^{\infty}\frac{1}{(2m+r)^2}\right)$$

$$< \frac{1}{2m\,\varepsilon}\sum_{k=0}^{n-m}\frac{b_{m+k}}{2m+k-1}.$$

Wegen $m\varepsilon > \varepsilon^{-2}$, d.h. $1/m\varepsilon < \varepsilon^2$ gilt erst recht

$$(8)\qquad I_2'' < \frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{k=0}^{n-m}\frac{b_{m+k}}{2m+k-1} < \frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{k=m}^{n}\frac{b_k}{k}.$$

(6), (7) und (8) liefert in Hinsicht auf (5) die Ungleichung

$$\left(\frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon^5}{2} - \frac{\varepsilon^2}{2}\right)\sum_{k=m}^{n}\frac{b_k}{k} + \frac{1}{2}\int_0^{\varepsilon}\sum_{\substack{k,p=m \\ k\neq p}}^{n}\frac{b_k}{p}\left(1-\frac{x}{\varepsilon}\right)\cos(k-p)\,x\,dx <$$

$$< I_1 + I_2' - I_2'' = S_n \leqq |S_n| < 4KM.$$

Nach einer Vertauschung der Summen- und Integralzeichen auf der linken Seite der letzten Ungleichung sind nach (3) für $k \geqq p$ alle Integrale positiv. Für ein festes ε ist die Zahl $m = m(\varepsilon)$ beschränkt, und für $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$ folgt aus der letzten Ungleichung für jedes n

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{k} < C(\varepsilon),$$

d.h. wegen $b_\nu \geqq 0$ die Konvergenz von (2).

Im allgemeineren Fall folgt der Satz in der Weise, daß man $b_\nu \geqq 0$ durch $c_\nu = b_\nu + \lambda_\nu \geqq 0$ ersetzt. Es ist dann nur noch nötig eine Abschätzung der rechten Seite in (5) zu geben. Man kann sie folgendermaßen gewinnen:

$$|S_n| \leqq 2K\int_0^{\varepsilon}\left|\sum_{k=m}^{n} c_k \sin k\,x\right|dx \leqq 2K\int_0^{\varepsilon}\left|\sum_{k=m}^{n} b_k \sin k\,x\right|dx +$$

$$+ 2K\int_0^{\varepsilon}\left|\sum_{k=1}^{m}\lambda_k \sin k\,x\right|dx + 2K\int_0^{\varepsilon}\left|\sum_{k=1}^{n}\lambda_\varrho \sin k\,x\right|dx.$$

Also für genügend großes $m = m(\varepsilon)$ sind die zwei letzten Summen unter dem Integralzeichen (wegen $\lambda_\nu \downarrow 0$) positiv in $(0, \varepsilon)$, falls ε genügend klein ist [5, S. 229]. Die Beschränktheit in der letzten Ungleichung folgt dann aus der Voraussetzung $\sum \lambda_\nu/\nu < \infty$. Nach dem oben Gesagten folgt wegen $(b_\nu + \lambda_\nu) \geqq 0$ die Konvergenz von $\sum (b_\nu + \lambda_\nu)/\nu$ und daraus diejenige von $\sum b_\nu/\nu$.

Literatur

[1] HARDY, G. H.: Divergent Series. Oxford 1949.
[2] HARDY, G. H., and W. W. ROGOSINSKI: Notes on Fourier Series (1): On sine series with positive coefficients. J. London Math. Soc. **18**, 50—57 (1943).
[3] HEILBRONN, H., u. E. LANDAU: Bemerkungen zur vorstehenden Arbeit von Herrn BOCHNER. Math. Z. **37**, 10—16 (1933).
[4] HEILBRONN, H., u. E. LANDAU: Ein Satz über Potenzreihen. Math. Z. **37**, 17 (1933).
[5] ZYGMUND, A.: Trigonometric Series, Vol. I. Cambridge 1959.

Institute Mathématique de l'Académie Serbe des Sciences Belgrade (Yougoslavie)

(Eingegangen am 2. Mai 1960)

Wiegold, J.
Math. Zeitschr. 75, 57—78 (1961)

Some remarks on generalised products of groups with amalgamations

By
James Wiegold

1. Introduction

In [1] we introduced the concepts of generalised free nilpotent and verbal products of groups with amalgamations, and in the opening sections derived some of their more elementary properties, heuristic for a discussion of the existence of such products for a given system of groups with given amalgamations. This was the central theme of the paper, and similar existence problems will be dealt with here. Examples showed that the most innocent-looking systems of groups with amalgamations may not have generalised products of one sort or another; and in fact the only type of product which really yielded to attack was the second nilpotent product of two groups with an amalgamation. For these it was possible to give a set of necessary and sufficient conditions that they exist, and while the conditions are unmanageable in practice, they are at least some insight into the subject. I have been able to extend this result a little, in that I show (§ 5) that conditions of a like nature are necessary for the existence of a much wider class of products. They are however not sufficient (Example 5.7) despite being very strong conditions: and I can see no way of supplementing them with further necessary conditions so that the combined set is both necessary and sufficient.

Section 2 is given to a discussion of notation and elementary results — the reader is referred to [1] for such notation as is either not standard, or not described here. The remainder of the paper contains some more or less unconnected results on generalised products with amalgamations. In [1] we gave some normal forms for the elements of the generalised free second nilpotent product of two groups with an amalgamation. These however are not very useful, the derivation of the normal form of the product of two elements in normal form being rather complicated. In § 3 we derive a much simpler normal form for the elements of a *generalised regular product* (§ 2) of any number of groups in the special case where each pair of constituents intersect in one and the same subgroup, and this common intersection is central in the whole group. The normal form is particularly suitable for an illumination of the structure of the generalised free second nilpotent product of groups with a central amalgamation.

In [2] B. H. Neumann uses permutational products of groups to show that any amalgam (§ 2) of two soluble groups such that the amalgamation

is central in one factor is always embeddable in a soluble group whose soluble length is bounded in terms of those of the original groups. As was shown in [1], this is no longer true if the word "soluble" is replaced by "nilpotent": an amalgam of an abelian group with a nilpotent group of class 2 need not be embeddable in a nilpotent group. However, if both the groups under discussion are nilpotent and *finite* (and the amalgamation is still central in one of them — this is a very important restriction), then the amalgam is indeed (§ 4) embeddable in a nilpotent group. This time there is no bound on the class of the embedding group in terms of those of the original groups: Example 4.3 provides for each natural number n an amalgam of a cyclic group with the dihedral group of order 8 embeddable in no group which is nilpotent of class less than n. Strangely enough, however, there *is* a bound in terms of the *orders* of the original groups.

Finally in § 6 we consider metabelian products of two groups with an amalgamation. Here the results are very incomplete. We give some sufficient conditions that the generalised free metabelian product of two groups with amalgamation exist, having already in the previous section given strong necessary ones. Neither set is both necessary and sufficient. In contrast with the case of second nilpotent products, I have been unable to find a set of necessary and sufficient conditions for the existence of the generalised free metabelian product of two groups with amalgamation — other than those in [1] in terms of the generalised free product, which do not tell us very much. The overall conclusion seems to be, even in the light of the remarks of the preceding paragraph, that solubility is perhaps even worse behaved in this context than is nilpotency.

2. Preliminaries

We first of all fix such of our notation, definitions and elementary results as are not contained in §§ 2, 3, 4 of our previous paper [1]. In order to save much undue repitition, we shall assume the content of those introductory sections as known. In addition we shall need some results on generalised free and generalised direct products, and also on permutational products: for definitions see [2] and for instance [3].

2.1. [3, p. 505] Let F be the generalised free product of its subgroups G_α (α ranging over some index set $\mathfrak{M}$) with amalgamations $G_\alpha \cap G_\beta = H_{\alpha\beta}$ ($\alpha \neq \beta$), and further let Q be a group containing homomorphic images $G_\alpha\varphi_\alpha$ of the G_α, where two mappings φ_α and φ_β agree on their common region $H_{\alpha\beta}$ of definition. Then the φ_α can be simultaneously extended to a homomorphism of the whole of F into Q.

2.2. [4] Let F be the generalised free product of its subgroups G_α ($\alpha \in \mathfrak{M}$) amalgamating a single normal subgroup H: $G_\alpha \cap G_\beta = H$ for all $\alpha, \beta \in \mathfrak{M}$, $\alpha \neq \beta$. Then the factor group F/H is isomorphic with the (ordinary) free product $\prod_{\alpha\in\mathfrak{M}}^{*} G_\alpha/H$ of the factor groups G_α/H.

This second result is presumably well-known, but apparently not published anywhere except in [4], which is the author's doctoral dissertation. It is in any case very easy to prove.

Suppose now that G is any group generated by its subgroups G_α ($\alpha \in \mathfrak{M}$), with amalgamations $G_{\alpha'} \cap G_\beta = H_{\alpha\beta}$, and that F is the generalised free product of the G_α with these amalgamations. Then, as can be seen from 2.1, there is an obvious homomorphism of F onto G, namely that extending isomorphisms of the G_α in F onto their isomorphic copies in G. If the kernel of this homomorphism is contained in the cartesian[1]) $[G_\alpha]^F$ of the G_α in F, then G will be called a *generalised regular product* of its subgroups G_α with amalgamations $H_{\alpha\beta}$. The motivation for using this term is that in the case where the amalgamations are all trivial, so that F is the ordinary free product of the G_α, we get a regular product in the sense of Golovin [5]. All the generalised products defined in [1] — at least the *free* ones — are generalised regular products.

In particular, we defined in [1] two sorts of generalised nilpotent product, namely those given the names Golovin nilpotent products and Moran nilpotent products. We shall remind the reader of these constructions. Let the group G be generated by its subgroups G_α ($\alpha \in \mathfrak{M}$), with the amalgamations $G_\alpha \cap G_\beta = H_{\alpha\beta}$, and define by induction the following sequence of normal subgroups of G:

$$[G_\alpha]^G = O_1(G) \geqq O_2(G) \geqq \cdots \geqq O_n(G) \geqq \cdots,$$

where $O_n(G) = [G, O_{n-1}(G)]$ for $n > 1$. Next let V be any set of words (see e.g. [1], Definition 2.1), and $V(G)$ the verbal subgroup of G associated with V. Then if in G the equality[2]) $O_n(G) = E$ holds, G is called a *generalised Golovin n-th nilpotent (for short GN_n)* product of the G_α with amalgamations $H_{\alpha\beta}$; if on the other hand $V(G) \cap [G_\alpha]^G = E$, G is called a *generalised Moran V-verbal* (*MV*-) product of the G_α with amalgamations $H_{\alpha\beta}$. With $V(G) = {}^nG$ [the $(n+1)$-th term of the lower central series[2]) of G], we have the *generalised Moran n-th nilpotent* (*MN_n*-) product.

One of the characteristic differences in behaviour between these two sorts of nilpotent product is that a homomorphic image of a generalised Golovin nilpotent product of groups is a generalised Golovin nilpotent product of the homomorphic images of these groups: whereas, as we saw in [1], Example 6, the corresponding result does not hold for the Moran products. The Moran soluble products also have this bad behaviour under homomorphisms, but on the basis of some results of Moran [6], we can define what we naturally call generalised Golovin soluble products. However, we shall do this only for metabelian products:

---

[1]) That is, the normal closure in F of the set of all commutators $[g_\alpha, g_\beta]$, where $g_\alpha \in G_\alpha$, $g_\beta \in G_\beta$, $\alpha \neq \beta$, and α and β run over the whole of $\mathfrak{M}$.

[2]) For any group G, the unit subgroup is denoted by E; the lower central series is $G = {}^0G \geqq {}'G \geqq \cdots \geqq {}^nG \geqq \cdots$; the derived series is $G = G^{(0)} \geqq G' \geqq G'' \geqq \cdots \geqq G^{(n)} \geqq \cdots$.

DEFINITION 2.3. *The group G is a generalised Golovin metabelian product (for short GS_2-product) of its subgroups G_α ($\alpha \in \mathfrak{M}$) with amalgamations $G_\alpha \cap G_\beta = H_{\alpha\beta}$ ($\alpha \neq \beta$), if*

(i) *the G_α together generate G;*

(ii) *for each pair α, β of different suffices in $\mathfrak{M}$,*

$$[G'_\alpha, G'_\beta] = E;$$

(iii) $[G', [G_\alpha]^G] = E$.

The result of MORAN just mentioned is that in the free product F of groups G_α,

$$F'' \cap [G_\alpha]^F = [G'_\alpha]^F [F', [G_\alpha]^F].$$

This means of course that the corresponding regular products (for details see [5]) coincide. A generalised *free* GS_2-product is defined in a manner completely parallel to that in which generalised free nilpotent products were defined in [1], Definition 4.3: any other GS_2-product of the same groups with the same amalgamations is to be a homomorphic image of the free one.

Next we need a result on the generalised direct product of groups with a single amalgamation. Of the possible definitions we use the following:

DEFINITION 2.4. *The group G is the generalised direct product of its subgroups G_α ($\alpha \in \mathfrak{M}$) amalgamating a single subgroup H if*

(i) *the groups G_α together generate G;*

(ii) *if $\alpha \neq \beta$, G_α and G_β commute elementwise;*

(iii) *if G^α denotes the subgroup of G generated by all the G_β with $\beta \neq \alpha$,*

$$G_\alpha \cap G_\beta = G_\alpha \cap G^\alpha = H$$

for all $\alpha, \beta \in \mathfrak{M}$, $\alpha \neq \beta$.

Clearly H is central in G, and moreover G is uniquely determined by these properties, so that the use of the definite article is justified. B. H. NEUMANN [3] has shown that the generalised direct product of any set of groups with a single amalgamation always exists provided only that this amalgamation is central in all the constituents. The result that we need can be found in M. F. NEWMAN [7]:

2.5. Let G be the generalised direct product of its subgroups G_α ($\alpha \in \mathfrak{M}$) with a single amalgamated subgroup H. If now $\mathfrak{M}$ is linearly ordered by a relation $<$ between its elements, and, for each $\alpha \in \mathfrak{M}$, S_α is a left transversal (complete system of left coset representatives) of G_α modulo H, then every element of G has a unique expression of the form

$$s_1 s_2 \dots s_m h,$$

where $m \geqq 0$, $h \in H$, $s_i \in S_{\alpha_i}$, $i = 1, 2, \dots, m$, and $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m$.

LEMMA 2.6. *Let G be a generalised regular product of its subgroups G_α ($\alpha \in \mathfrak{M}$) with a single central amalgamated subgroup H. Then for each $\alpha \in \mathfrak{M}$, $G_\alpha \cap [G_\alpha]^G = E$.*

PROOF. Let F be the generalised free and D the generalised direct product of the G_α amalgamating H. Then obviously $F/[G_\alpha]^F \cong D$, and by definition $G \cong F/N$ for some $N \leq [G_\alpha]^F$. But then D is a homomorphic image of G,

$$D \cong F/N \,/\, [G_\alpha]^F N/N \cong G/[G_\alpha]^G,$$

and it is not hard to see that the mapping of G onto D which maps the constituents G_α isomorphically will have $[G_\alpha]^G$ as its kernel. This is sufficient to prove the lemma.

A strict definition of an *amalgam* of two groups would be the following. It consists of a quintuplet (A, B, H, K, φ), where A and B are groups, H and K isomorphic subgroups of A and B respectively, and φ an isomorphism of H onto K. In practice we think of the elements of H and K as being identified according to the mapping φ, so that the amalgam becomes an "incomplete group" (BAER [8]) consisting of the set-theoretical union of A and B, these groups intersecting in the subgroup H. With this agreement we shall write the amalgam as $\mathfrak{A} = (A, B; A \cap B = H)$. The isomorphism φ is now suppressed and plays no further role: it is to be noted, however, that different amalgamating isomorphisms φ can give rise to very different incomplete groups (§ 3). By an *embedding* of $\mathfrak{A}$ we mean any group C containing isomorphic copies A_1, B_1 of A, B respectively intersecting in an isomorphic copy H_1 of H; specifically there are to be isomorphisms μ, ν of A, B onto A_1, B_1 respectively, such that for any $h \in H$, $h\mu = h\nu \in H_1$, and for any $h_1 \in H_1$, $h_1 \mu^{-1} = h_1 \nu^{-1} \in H$. In short, the amalgam $\mathfrak{A}$ is "isomorphically contained" in C. It is well-known (see for instance O. SCHREIER [9]) that any amalgam of two groups is embeddable in a group. Further information on this subject is to be found in [3] and [10].

Next we come to a definition of *permutational products*. Let

$$\mathfrak{A} = (A, B;\ A \cap B = H)$$

be an amalgam of two groups, and choose arbitrary — though hereafter fixed — left transversals S, T of A, B respectively modulo H. Form the set W of all triplets of the form (s, t, h), with $s \in S$, $t \in T$, $h \in H$; then the permutational product of $\mathfrak{A}$ corresponding to the transversals S and T will be a certain permutation group on W, as follows. For arbitrary $a \in A$, we define a mapping $\varrho(a)$ of W into itself by the rule:

$$(s, t, h)^{\varrho(a)} = (s', t, h'),$$

$s' \in S$ and $h' \in H$ being defined by the equality

$$s\, h\, a = s'\, h'.$$

Similarly for $b \in B$, we define a mapping $\varrho(b)$ of W into itself by the rule:

$$(s, t, h)^{\varrho(b)} = (s, t'', h''),$$

$t'' \in T$ and $h'' \in H$ being given this time by

$$t\, h\, b = t''\, h''.$$

B. H. NEUMANN shows in [2] that

(i) for $h^0 \in H$, there is no ambiguity in the definition of $\varrho(h^0)$;

(ii) $\varrho(a)$ and $\varrho(b)$ are permutations of W;

(iii) the set $\varrho(A)$ of all $\varrho(a)$ is a subgroup of the full symmetric group $\Sigma(W)$ on W, isomorphic with A; the set $\varrho(B)$ of all $\varrho(b)$ a subgroup isomorphic with B;

(iv) $\varrho(A) \cap \varrho(B) = \varrho(H)$ is isomorphic with H.

In other words, $\Sigma(W)$ is an embedding for $\mathfrak{A}$. The subgroup P of $\Sigma(W)$ generated by $\varrho(A)$ and $\varrho(B)$ is called a *permutational product* of $\mathfrak{A}$. We use the indefinite article since P depends not only on $\mathfrak{A}$ but also on the choice of transversals S and T — NEUMANN gives examples in [2] to show how very heavy this dependence is.

We need the following result on permutational products, which is implicit in Corollary 3 to Lemma 2 of [2]:

2.7. Let $\mathfrak{A} = (A, B; A \cap B = H)$ be an amalgam such that H is in the centre of A. Then in any permutational product of $\mathfrak{A}$, the cartesian is isomorphic with a subgroup of the unrestricted direct product of $|A:H|$ isomorphic copies[3]) of $[B, H]$.

Lastly we need some results on regular products of groups. We recall that a group G is a regular product of its subgroups G_α ($\alpha \in \mathfrak{M}$), if each G meets the normal closure in G of the subgroup G^α generated by all the G_β with $\beta \neq \alpha$ in the unit element only. The first two results can be found in GOLOVIN [5], [11]:

2.8. If $\mathfrak{M}$ is linearly ordered by a relation $<$ between its elements, then every element of G has a unique expression of the form

$$g_1 g_2 \cdots g_m u,$$

where $m \geqq 0$, $u \in [G_\alpha]^G$, $g_i \in G_{\alpha_i}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, and $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_m$.

2.9. In the (free regular) second nilpotent product[4]) G of groups G_α, the cartesian is central and is the direct product of all the subgroups $[G_\alpha, G_\beta]$ with $\alpha \neq \beta$. Moreover $[G_\alpha, G_\beta]$ is isomorphic with the cartesian of G_α and G_β in *their* second nilpotent product.

Now it is known (see [1], [12]) that the cartesian of two groups A, B in their second nilpotent product is isomorphic with their tensor product $A \otimes B$. Putting all these facts together, we have the following lemma:

LEMMA 2.10. *In the second nilpotent product of groups G_α ($\alpha \in \mathfrak{M}$), the cartesian is isomorphic with the direct product $\prod^\times G_\alpha \otimes G_\beta$ of all tensor products $G_\alpha \otimes G_\beta$ with $\alpha \neq \beta$, each pair α, β being taken just once.*

[3]) The index of the subgroup H in A is denoted by $|A:H|$.

[4]) That is, the factor group $F/[F, [G_\alpha]^F]$ of the free product F of the G_α; it is the largest group generated by the G_α for which the cartesian is central.

3. Normal forms

Let G be a generalised regular product of its subgroups G_α (α ranging over some suffix set $\mathfrak{M}$) with a single central amalgamation H: $G_\alpha \cap G_\beta = H$, $\alpha \neq \beta$. For each $\alpha \in \mathfrak{M}$, choose an arbitrary left transversal S_α of G_α modulo H, so that each element of G_α is uniquely of the form sh, with $s \in S_\alpha$, $h \in H$. For convenience we assume that the unit element $1 \in S_\alpha$ for each α. Suppose now that $\mathfrak{M}$ is linearly ordered by a relation $<$ between its elements; then it is not difficult to see that every element of G can be expressed in the form

$$g = s_1 s_2 \dots s_n h u, \tag{3.1}$$

where $n \geqq 0$, $h \in H$, $u \in [G_\alpha]^G$, $s_i \in S_{\alpha_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$ and $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$.

Our aim is to show that the form (3.1) is in fact uniquely determined. To do this, we invoke the aid of known properties of the generalised direct product D of the G_α amalgamating H. For the sake of clarity, we think of D as being the generalised direct product of groups G_α^0 ($\alpha \in \mathfrak{M}$) with amalgamations $G_\alpha^0 \cap G_\beta^0 = H^0$; for each $\alpha \in \mathfrak{M}$ there is to be an isomorphism ϑ_α of G_α onto G_α^0, two such mappings agreeing where they are both defined (namely on H), and moreover $H\vartheta_\alpha = H^0$ for each α. In this way we get left transversals $S_\alpha^0 = S_\alpha \vartheta_\alpha$ of the G_α^0 modulo H^0, consisting of left coset representatives $s_\alpha^0 = s_\alpha \vartheta_\alpha$.

From Lemma 2.6 we see at once that the isomorphisms ϑ_α can be simultaneously extended to a homomorphism ϑ of G onto D, whose kernel is the cartesian $[G_\alpha]^G$. Suppose then that in G,

$$g = s_1 s_2 \dots s_n h u = t_1 t_2 \dots t_m k v \tag{3.2}$$

are two expressions of the form (3.1) for the element g; in this, $m \geqq 0$, $k \in H$, $v \in [G_\alpha]^G$, $t_i \in S_{\beta_i}$ and $\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_m$. Applying ϑ to (3.2) we get

$$s_1^0 s_2^0 \dots s_n^0 h^0 = t_1^0 t_2^0 \dots t_m^0 k^0.$$

By 2.5, this means that $m = n$, $h^0 = k^0$, $s_i^0 = t_i^0$ for $i = 1, 2, \dots, n$. But Lemma 2.6 tells us that the kernel $[G_\alpha]^G$ of ϑ meets each of the factors G_α in the unit element only, so that in fact $h = k$, $s_i = t_i$ for $i = 1, 2, \dots, n$. Finally, these results mean from (3.2) that $u = v$, and hence that (3.1) is a normal form for the elements of G, as asserted.

This treatment applies to all the generalised products defined in [1]. It has a special significance for the generalised free GN_2-product of groups with a single central amalgamated subgroup, arising out of the fact that we can specify the structure of the cartesian subgroup of such a product, this time in terms of the tensor product.

Let then G be the generalised free GN_2-product of its subgroups G_α ($\alpha \in \mathfrak{M}$) amalgamating the central subgroup H, and let F be the generalised free product — generated by isomorphic copies $G_\alpha^0 = G_\alpha \vartheta_\alpha$ of the G_α with the subgroup $H^0 = H\vartheta_\alpha$ amalgamated, in a way exactly analagous to that described

earlier in this section for the generalised direct product. Then by [1], Theorem 4.6, $G \cong F/[F, [G_\alpha^0]^F]$, so that

$$G/H \cong F/[F, [G_\alpha^0]^F] \,/\, H^0[F, [G_\alpha^0]^F]/[F, [G_\alpha^0]^F]$$

$$\cong F/H^0 \,/\, H^0[F, [G_\alpha^0]^F]/H^0.$$

But, by (2.2), F/H^0 is the ordinary free product of the factor groups G_α^0/H^0, so that in fact G/H is isomorphic with the (free) regular GN_2-product of the G_α^0/H^0. The cartesian of the G_α^0/H^0 in this group is, by Lemma 2.10, isomorphic with the direct product $\prod_{\alpha \neq \beta}^{\times} G_\alpha^0/H^0 \otimes G_\beta^0/H^0 = L$, say; hence the cartesian of the G_α in G is given by

$$[G_\alpha]^G H/H \cong L,$$

cartesians being preserved under homomorphic mappings. Finally, by Lemma 2.6, H intersects $[G_\alpha]^G$ trivially, so that we arrive at the conclusion that $[G_\alpha]^G$ is isomorphic with L.

To sum up, we have proved the following theorems:

THEOREM 3.3. *Let G be a generalised regular product of its subgroups G_α (α ranging over some index set $\mathfrak{M}$) with a single central amalgamated subgroup H. For each $\alpha \in \mathfrak{M}$, let S_α be an arbitrary but fixed left transversal of G_α modulo H, containing the unit element. Suppose further that $\mathfrak{M}$ is linearly ordered by the relation $<$ between its elements. Then every element of G has a unique expression of the form*

$$s_1 s_2 \dots s_n h u,$$

where $n \geqq 0$, $h \in H$, $u \in [G_\alpha]^G$, $s_i \in S_{\alpha_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$ and $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$.

THEOREM 3.4. *If G is the generalised free GN_2-product of its subgroups G_α (α ranging over some index set $\mathfrak{M}$) with a single central amalgamated subgroup H, then the cartesian $[G_\alpha]^G$ of the G_α in G is isomorphic with the direct product $\prod_{\alpha \neq \beta}^{\times} G_\alpha/H \otimes G_\beta/H$.*

These theorems mean that we can construct the generalised free GN_2-product of groups with a central amalgamation as a set of words in an obvious way, and specify the product of two such words by means of not too complicated equations. In a sense it makes the generalised GN_2-product in this case no more formidable an object than the regular one.

4. Nilpotent embeddings of group amalgams

The general questions we ask in this section are the following. When can an amalgam $\mathfrak{A} = (A, B; A \cap B = H)$ of two nilpotent groups be embedded in a nilpotent group? When can such an amalgam be embedded in a nilpotent group of class bounded in terms of the classes of A and B? As we shall see presently (Example 4.3) there exists for each natural number n an amalgam of a cyclic group with the dihedral group of order 8 which is embeddable in a group of class n, but in no group of lower class. This of course means that the two problems are in fact different.

Let us examine the latter question first, since it is rather more difficult, and the answer less complete. As the example quoted shows, it is not always possible to embed $\mathfrak{A}$ in the required way. However, some progress was made towards a solution in [1], where I gave (in slight disguise, Theorem 8.13) necessary and sufficient conditions that $\mathfrak{A}$ be embeddable in a nilpotent group of class 2. In the following section (Theorems 5.4—5.6) we deduce some similar conditions which are necessary for $\mathfrak{A}$ to be embeddable in a group belonging to a given variety[5]) $\mathfrak{V}$. These conditions are not sufficient for the variety of metabelian groups (Example 5.7); whether they are sufficient for some variety of nilpotent groups (other than the second nilpotent, where we know that they are [1, Theorem 8.13]) remains an open question*).

We shall now give a partial answer to the first question. It is certainly not always possible to embed $\mathfrak{A}$ in a nilpotent group. Even more, B. H. Neumann constructs in [2] an example where both A and B are of order 125 and nilpotent of class 2, and yet $\mathfrak{A}$ is embeddable in no *soluble* group — any group generated by this amalgam has the alternating group on 5 symbols as a homomorphic image. In [1] I give an amalgam where A is a Prüfer group of type 2^∞ and B the dihedral group of order 8, and for which the intersection of the terms in the finite part of the lower central series of any group containing $\mathfrak{A}$ always has the non-trivial subgroup B': such a group is therefore not nilpotent[6]). The infiniteness of A — or rather the fact that A does not have finite exponent — plays a crucial role here, and the question immediately arises as to the effect of imposing the condition that A be finite as well as abelian, while keeping B finite and nilpotent of class 2. As we shall now see, this is more than enough to ensure that $\mathfrak{A}$ be embeddable in a nilpotent group.

Theorem 4.1. *Let $\mathfrak{A}=(A, B;\ A\cap B=H)$ be an amalgam of two p-groups (p a prime) such that H is central in A, and either A/H is finite, or $[B, H]$ has finite exponent. Then $\mathfrak{A}$ is embeddable in a p-group.*

Proof. We shall show that any permutational product P of $\mathfrak{A}$ is a p-group. Firstly the cartesian $C=[\varrho(A), \varrho(B)]$ is normal in P, since $\varrho(A)$ and $\varrho(B)$ generate P (see [5]); P/C is generated by its p-subgroups $\varrho(A)C/C$ and $\varrho(B)C/C$, which commute elementwise. Consequently P/C is a p-group.

Next, by 2.7, C is isomorphic with a subgroup of the unrestricted direct product of $|A:H|$ copies of $[B, H]$. But the remaining assumptions of the theorem entail that this direct product is a p-group; hence C, and likewise P, being an extension of a p-group by a p-group, is a p-group.

I do not know whether the restriction that either A/H or the exponent of $[B, H]$ be finite is necessary for the conclusion of the theorem.

*) Added in proof: This point is now settled; they are not sufficient for the variety of third nilpotent groups — Example 5.7 suffices.

[5]) A *variety* of groups is any class of groups closed with respect to the three operations of taking subgroups, homomorphic images and unrestricted direct products.

[6]) However, as with any amalgam of two soluble groups where the amalgamation is central in one factor, this amalgam in embeddable in a soluble group — see Neumann [2].

COROLLARY 4.2. *If $\mathfrak{A}=(A, B; A\cap B=H)$ is an amalgam of finite p-groups such that H is central in A, then $\mathfrak{A}$ is embeddable in a finite p-group, and so a fortiori in a nilpotent group.*

This follows from the proof of Theorem 4.1 and the obvious remark that any permutational product of finite groups is finite.

One can prove a little more than this corollary, namely that $\mathfrak{A}$ is embeddable in a group of class bounded in terms of certain numerical invariants associated with $\mathfrak{A}$. For instance let the orders of the groups A, B, H, $[B, H]$, centre of B be p^α, p^β, p^γ, p^δ, p^ε respectively. Then one shows that the centre of $\varrho(B)$ is central in any permutational product P, so that the centre of P has order at least p^ε. Again one shows very easily that the order of P does not exceed p^N where

$$N=\alpha+\beta+\delta p^{\alpha-\gamma}.$$

This is because P/C certainly cannot have order more than $p^\alpha p^\beta$, this being the product of the order of A by the order of B, and C itself, as a subgroup of the direct product of $p^{\alpha-\gamma}$ copies of $[B, H]$, cannot have order more than $p^{\delta p^{\alpha-\gamma}}$. Putting these facts together we see that the class of P is not more than $\alpha+\beta+\delta p^{\alpha-\gamma}-\varepsilon-1$. These methods are very rough, and it is scarcely probable that they would yield anything like the real truth: in any case the true bound should not depend on p. However, the following example shows that the bound depends at least on α, β and γ, and *not* on the classes of A and B. It is based on Lemma 7.9 of [1], which we briefly quote:

Let G be an arbitrary group, g an element of G and d an element of G whose square commutes with g. Then for each $r\geqq 0$, the r-th term ${}^{r+1}G$ of the lower central series of G contains the commutator $[g^{2^r}, d]$.

EXAMPLE 4.3. Suppose that α, β, γ are three integers satisfying the inequalities:

$$\alpha>\gamma>1, \qquad \beta>\gamma+2.$$

Let A be a cyclic group of order 2^α:

$$A=G\mathfrak{p}(a; a^{2^\alpha}=1),$$

and let B be a group of order 2^β and class $\beta-\gamma-1$:

$$B=G\mathfrak{p}(b, c; b^{2^{\beta-\gamma}}=c^{2^\gamma}=1, c^{-1}bc=b^{-1}).$$

This group is the splitting extension of $G\mathfrak{p}(b)$ by $G\mathfrak{p}(c)$, the element c inducing the inverting automorphism of $G\mathfrak{p}(b)$. Next form an amalgam $\mathfrak{A}$ of A and B by identifying c with $a^{2^{\alpha-\gamma}}$. We shall show that $\mathfrak{A}$ is embeddable in no nilpotent group of class less than $\alpha+\beta-2\gamma$. To that end we let G be any group embedding $\mathfrak{A}$, and observe first of all that $(bc)^2$ commutes with a. In fact the relations of B imply that $(bc)^2=c^2$, so that $(bc)^2$ is even a power of a. Hence by the lemma quoted above, ${}^{\alpha-\gamma+1}G$ contains the commutator

$$[a^{2^{\alpha-\gamma}}, bc]=[c, bc]=[c, b]^c,$$

and therefore it of course contains $[c, b] = b^2$. It now follows very quickly that ${}^{\alpha+\beta-2\gamma-1}G$ contains the non-trivial element $b^{2^{\beta-\gamma-1}}$ of B, and hence that G is certainly not nilpotent of class less than $\alpha+\beta-2\gamma$.

Corollary 4.2 deals with the case of an amalgam of two finite p-groups with the amalgamation central in one factor; to get the case of arbitrary finite nilpotent groups we first prove an auxiliary lemma:

LEMMA 4.4. *Let $\mathfrak{A}_\alpha = (A_\alpha, B_\alpha; A_\alpha \cap B_\alpha = H_\alpha)$ be an amalgam of two groups which is embeddable in a group of some variety $\mathfrak{V}$, for each α in some index set $\mathfrak{M}$. Then if $A = \prod^\times A_\alpha$, $B = \prod^\times B_\alpha$, $H = \prod^\times H_\alpha$ are the restricted direct products of the A_α, B_α and H_α respectively, then the amalgam $\mathfrak{A} = (A, B; A \cap B = H)$ is also embeddable in some group of the variety $\mathfrak{V}$.*

PROOF. Suppose that for each $\alpha \in \mathfrak{M}$, G_α is a group of the variety $\mathfrak{V}$ which embeds the amalgam $\mathfrak{A}_\alpha$. Then of course the direct product G of all the G_α lies[7]) in $\mathfrak{V}$, and we shall show that it embeds $\mathfrak{A}$. Firstly, G contains A and B, and they intersect in at least H in G. Next suppose that g is an element of A, B, so that

$$g = (\ldots, a_\alpha, \ldots) = (\ldots, b_\alpha, \ldots).$$

It follows that for each $\alpha \in \mathfrak{M}$, $a_\alpha = b_\alpha \in H_\alpha$; consequently $A \cap B$ is exactly H, and G embeds the amalgam.

THEOREM 4.5. *If $\mathfrak{A} = (A, B; A \cap B = H)$ is an amalgam of two finite nilpotent groups such that H is central in A, then $\mathfrak{A}$ is embeddable in a nilpotent group.*

PROOF. Let $p_1, p_2, \ldots, p_r$ be all the distinct primes occurring in the orders of A and B, and express A, B and H as direct products of their Sylow subgroups:

$$A = A_{p_1} \times A_{p_2} \times \cdots A_{p_r},$$

$$B = B_{p_1} \times B_{p_2} \times \cdots B_{p_r},$$

$$H = H_{p_1} \times H_{p_2} \times \cdots H_{p_r}.$$

We now have the situation of the preceding lemma. For each i, $\mathfrak{A}_i = (A_{p_i}, B_{p_i}; A_{p_i} \cap B_{p_i} = H_{p_i})$ is an amalgam of two p_i-groups with H_{p_i} central in A_{p_i}. Thus by Corollary 4.2, $\mathfrak{A}_i$ is embeddable in a group G_i which is nilpotent of class let us say n_i. If now we denote by n the maximum of the r numbers $n_1, n_2, \ldots, n_r$, all the groups $G_1, G_2, \ldots, G_r$ belong to the variety of groups which are nilpotent of class not exceeding n; and our theorem is proved by an obvious application of Lemma 4.4.

Once again, one can show that the amalgam is embeddable in a nilpotent group whose class is bounded in terms of $\mathfrak{A}$. With the notation of the theorem and that immediately following Corollary 4.2, the largest of the numbers $\alpha_i + \beta_i + \delta_i p_i^{\alpha_i - \gamma_i} - \varepsilon_i - 1$ is a rough estimate.

[7]) Actually this lemma remains true if the words "variety $\mathfrak{V}$" are replaced by "any class $\mathfrak{V}$ of groups closed with respect to the operation of taking restricted direct products".

I think it is apposite at this point to deal with a conjecture I made some time ago in [4], and should have made in [1]. Let X, Y be any two groups, and let $J_X(Y)$ be the subgroup of Y consisting of those elements y such that $x \otimes y = 1$ for all $x \in X$, in the tensor product $X \otimes Y$. As was pointed out in [1], the following conditions are necessary for the amalgam $\mathfrak{A} = (A, B; A \cap B = H)$ of two nilpotent groups of class 2 to be embeddable in a nilpotent group of the same class:

$$[J_A(B) \cap H, A] = [J_B(A) \cap H, B] = E.$$

The conjecture was that these are not sufficient. We now confirm this.

EXAMPLE 4.7. Let A be an infinite cyclic group generated by the element a, and let B be the second nilpotent product of an infinite cycle and a cycle of order 2:

$$B = Gp\,(b, c; [[b, c], b] = [[b, c], c] = c^2 = 1).$$

We form our amalgam $\mathfrak{A}$ by putting $a^2 = b$. Then $\mathfrak{A}$ is not embeddable in a nilpotent group of class 2; if it were we would have

$$[a^2, c] = [b, c] \neq 1,$$

$$[a^2, c] = [a, c^2] = 1,$$

a manifest contradiction. On the other hand, the condition that $[J_A(B) \cap H, A] = E$ is trivially satisfied, since A is abelian. Next, it is easy to see that $A \otimes B$ is generated by $a \otimes b$ which has infinite order, and $a \otimes c$ which has order 2. It thus follows that $J_B(A) = E$; for if $a^m \otimes b = 1$ for some integer m, then also $(a \otimes b)^m = 1$, which yields the required result that $m = 0$. Hence the remaining condition is satisfied, and we have our assertion.

We end this section by posing some problems. Suppose that

$$\mathfrak{A} = (A, B;\ A \cap B = H)$$

is an amalgam where A is abelian and B is nilpotent of class k. Is it true that that $\mathfrak{A}$ is embeddable in a ZA-group[8]) and likewise in a ZD-group? On the whole, it seems likely. In fact it is probably that such an amalgam is embeddable in a group whose lower central series terminates after $\omega + k - 1$ steps, and also one whose upper central series terminates after the same number of steps. (ω is the first transfinite ordinal.) For each k, there exists an amalgam of this sort such that the $(\omega + k - 2)$-th term of the lower central series of any group containing the amalgam is *non*-trivial: the following is an example.

EXAMPLE 4.6. Again A is a Prüfer group of type 2^∞:

$$A = Gp\,(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots;\ a_1^2 = 1, a_{n+1}^2 = a_n,\ n = 1, 2, \ldots),$$

[8]) A ZA-group is one whose transfinite upper central series terminates in the whole group; a ZD-group one whose transfinite lower central series terminates in the unit subgroup.

while B is dihedral of order 2^{k+1}:

$$B = G\not p\,(a, b;\ a^{2^k} = b^2 = (a\,b)^2 = 1)\,.$$

We form an amalgam by putting $H = G\not p\,(a_1) = G\not p\,(b)$, and let G be any group containing the amalgam. Then as before we see that ${}^{n+1}G$ contains $[a_n^{2^n}, a\,b] = [b, a\,b] = a^{-2}$ for each n, so that ${}^{\omega}G = \bigcap_{i=1}^{\infty} {}^{i}G$ contains a^2. This of course means that ${}^{\omega+k-2}G$ contains $a^{2^{k-1}}$, and is therefore non-trivial.

I have been unable to confirm that the $(\omega + k - 2)$-th term of the upper central series of G must be strictly smaller than G, though this seems a probable result.

Finally we pose the following question without conjecture:

Is every amalgam of two nilpotent groups of finite exponent, where the amalgamation is central in one factor, embeddable in a nilpotent group?

5. Necessary conditions for the existence of generalised products

In this section we change our standpoint a little, and restrict attention to generalised products of two groups with an amalgamation. Suppose that A and B are any groups, H and $H\varphi$ subgroups of A and B respectively, isomorphic under the mapping φ. We shall look for conditions that certain generalised products of A and B amalgamating H and $H\varphi$ according to φ exist — namely, those whose abbreviations are MV, GN_n and GS_2. If X stands for one of these properties, then by an almost word-for-word repitition of the proofs of Lemmas 8.1 and 8.2 of [1], we get the following lemmas.

LEMMA 5.1. *If the generalised free X-product of A and B amalgamating H and $H\varphi$ according to φ exists it is G_0/N, where*

(i) *G_0 is the free regular X-product of A and B,*

(ii) *N is the normal closure in G_0 of the set of all elements of the form $h^{-1}h\varphi$, where h ranges over H.*

LEMMA 5.2. *With the same notation as in Lemma 5.1, and if X is GN_n or GS_2, the generalised free X-product of A and B amalgamating H and $H\varphi$ according to φ exists if and only if the implication*

$$[a \in A,\ b \in B,\quad a\,b \in N] \Rightarrow [a \in H,\ b = a^{-1}\varphi]$$

always holds. If X is MV, then the condition is necessary for the existence of the generalised free MV-product, but not sufficient.

This last assertion is confirmed by examples given in [1]. We shall say that N is "tidy" in G_0 with respect to A and B if it has the property formulated in Lemma 5.2.

On the motivation of Lemma 5.2 we now prove some results, couched in rather more general terms than are strictly necessary for our main theme. In them, G_0 is *any* regular product of A and B, and N is the normal closure

in G_0 of the set of all elements of the form $h^{-1}h\varphi$, where h ranges over H. First a preparatory lemma:

LEMMA 5.3. *If $a_1, a_2, \ldots, a_n$ are any elements of A, $h_1, h_2, \ldots, h_n$ are any elements of H, and $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ are any integers ± 1, then N contains the element* $\prod_{i=n}^{1} [h_i, a_i]^{\varepsilon_i} \prod_{j=1}^{n} [h_j\varphi, a_j]^{-\varepsilon_j}$.

PROOF. This is by induction on n. For $n=1$, proceed as follows. Let a be any element of A and h any element of H; then since $h\,h^{-1}\varphi$ is in N and N is normal, it contains the commutator[9])

$$\begin{aligned}[a\,h, h\varphi\,h^{-1}] &= [a, h\varphi\,h^{-1}]^h\,[h, h\varphi\,h^{-1}] \\ &= [a, h\varphi\,h^{-1}]^h\,[h, h\varphi].\end{aligned}$$

However, $[h, h\varphi] = h^{\,1}h^{-1}\varphi hh\varphi = (h^{-1}h\varphi)\,(h^{-2}\varphi h^2)\,(h^{-1}h\varphi) \in N$, so that also the commutator $k = [a, h\varphi h^{-1}]^h \in N$. Next,

$$\begin{aligned}k &= [a, h\varphi\,h^{-1}]^h = [a, h^{-1}]^h\,[a, h\varphi] \\ &= [h, a]\,[h\varphi, a]^{-1},\end{aligned}$$

so that the lemma is proved with $n=1$, $\varepsilon_1 = 1$. To get the case $\varepsilon_1 = -1$, we simply take the inverse of k, that is

$$\begin{aligned}k^{-1} &= [h\varphi, a]\,[h, a]^{-1} \\ &= [h, a]^{-1}\,[h\varphi, a]^{[h,a]^{-1}}.\end{aligned}$$

Transforming this by $[h, a]$, we see that $[h, a]^{\,1}[h\varphi, a] \in N$, as required.

Suppose now that $n \geqq 1$ and that N contains the element xy, where

$$x = \prod_{i=n}^{1} [h_i, a_i]^{\varepsilon_i} \in A,$$

$$y = \prod_{j=1}^{n} [h_j\varphi, a_j]^{-\varepsilon_j} \in [A, B],$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ being arbitrary elements of A, $h_1, h_2, \ldots, h_n$ arbitrary elements of H, and $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ arbitrary integers ± 1. Let $h_{n+1} = h$, $a_{n+1} = a$ be further elements of H, A respectively, and let $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon = \pm 1$; then by the first part of the lemma, N contains the element $[h, a]^{\varepsilon}[h\varphi, a]^{-\varepsilon}$, and therefore the product

$$\begin{aligned}(xy)^{[a,h]^{\varepsilon}}\,[h, a]^{\varepsilon}\,[h\varphi, a]^{-\varepsilon} &= [h, a]^{\varepsilon}\,x \cdot y\,[h\varphi, a]^{-\varepsilon} \\ &= \prod_{i=n+1}^{1} [a_i, h_i]^{\varepsilon_i} \prod_{j=1}^{n+1} [h_j\varphi, a_j]^{-\varepsilon_j}.\end{aligned}$$

This completes the induction, and the proof of the lemma.

[9]) For all commutator identities used here see § 2 of [1].

THEOREM 5.4. *If N is tidy in G_0 with respect to A and B, there is a homomorphism δ of $[A, H\varphi]$ onto $[A, H]$ defined by*

$$[a, h\varphi]\,\delta = [a, h].$$

PROOF. If $a_1, a_2, \ldots, a_n$ are any elements of A, $h_1, h_2, \ldots, h_n$ any elements of H, and $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ any integers ± 1, then it is enough to show that the equation $\prod_{i=1}^{n} [a_i, h_i\varphi]^{\varepsilon_i} = 1$ has the equation $\prod_{i=1}^{n} [a_i, h_i]^{\varepsilon_i} = 1$ as a necessary consequence. As we saw in the preceding lemma, N contains the element $\prod_{i=n}^{1} [a_i, h_i]^{-\varepsilon_i} \prod_{j=1}^{n} [a_j, h_j\varphi]^{\varepsilon_j}$. If now $\prod_{i=1}^{n} [a_i, h_i\varphi] = 1$, then N contains $\prod_{i=n}^{1} [a_i, h_i]^{-\varepsilon_i}$; but N is tidy with respect to A and B, so that we must conclude that $\prod_{i=1}^{n} [a_i, h_i]^{\varepsilon_i} = 1$.

In a precisely analagous fashion we prove the following result.

THEOREM 5.5. *If N is tidy in G_0 with respect to A and B, there is a homomorphism δ^0 of $[H, B]$ onto $[H\varphi, B]$ defined by*

$$[h, b]\,\delta^0 = [h\varphi, b].$$

Finally, we establish the necessary consonance between δ and δ^0.

THEOREM 5.6. *If N is tidy in G_0 with respect to A and B, and if d is any element of the intersection $[A, H\varphi] \cap [H, B]$, then*

$$d\delta \in H, \qquad d\delta\varphi = d\delta^0.$$

PROOF. By theorems 5.3 and 5.4, N contains the elements $n_1 = d\delta \cdot d$ and $n_2 = d\delta^0 \cdot d$, and consequently their quotient:

$$\begin{aligned} n_1 n_2^{-1} &= (d\delta \cdot d)\,(d^{-1} \cdot d^{-1}\delta^0) \\ &= d\delta \cdot d^{-1}\delta^0. \end{aligned}$$

But N is tidy, and $d\delta \in A$, $d\delta^0 \in B$, so that we conclude that $d\delta \in H$ and that $d\delta\varphi = d\delta^0$, as required.

Suppose now that A and B belong to some variety of $\mathfrak{V}$ groups. Then associated with $\mathfrak{V}$ there is a set V of words — consisting of the identical relations satisfied by all the groups in $\mathfrak{V}$ (see for instance GARRETT BIRKHOFF [*13*]) — and then of course an MV-product. It follows easily from results of MORAN in [*14*] (see [*1*, (4.7)]) that the existence of the generalised free MV-product of A and B with H and $H\varphi$ amalgamated according to φ is equivalent to the embeddability of the corresponding amalgam $\mathfrak{A} = (A, B; A \cap B = H)$ in a group belonging to the variety $\mathfrak{V}$. We have therefore obtained the result promised in the second paragraph of the preceding section: in Theorems 5.4—5.6 we simply take G_0 to be the free regular MV-product of A and B.

The necessary conditions provided by the theorems are strong in the sense that all the other sets of necessary conditions that I have been able to find are easy consequences of them. Indeed, as has been said already, they are also sufficient for the case of GN_2-products. That being the case, it would appear likely that they are also sufficient for the case (for instance) of GS_2-products. Unfortunately this is not so, as the following example shows.

EXAMPLE 5.7. A and B are both dihedral groups of order 8:

$$A = G\not p\,(a, b;\ a^4 = b^2 = (a\,b)^2 = 1),$$

$$B = G\not p\,(c, d;\ c^4 = d^2 = (c\,d)^2 = 1);$$

we take H to be the subgroup $G\not p\,(a^2, b)$ of A, and $H\varphi$ the subgroup $G\not p\,(c^2, d)$ of B, the isomorphism φ being generated by the correspondences $a^2 \leftrightarrow d$, $b \leftrightarrow c^2$. We show three things about this system of groups.

(i) *If G is any group containing the amalgam so formed, then b and d are contained in all terms of the lower central series of G.* Clearly they are in the first term, which is just G itself. Now suppose that σ is any ordinal number, and that $b,\ d \in {}^{\lambda}G$ for all $\lambda < \sigma$. If σ is a limit number, $G = \bigcap_{\lambda<\sigma} {}^{\lambda}G$, whence it is obvious that $b, d \in {}^{\sigma}G$; if not, ${}^{\sigma}G = [{}^{\sigma-1}G, G]$ and so it contains

$$[a, b] = a^2 = d, \qquad [c, d] = c^2 = b.$$

This gives us the assertion. As a consequence, G certainly cannot be locally nilpotent, for in the contrary case the subgroup generated by the amalgam would be nilpotent. Hence G cannot be a ZA-group, nor a ZD-group. It is instructive to note that if φ is replaced by the isomorphism generated by $a^2 \leftrightarrow c^2$, $b \leftrightarrow d$, the amalgam so formed is embeddable in a nilpotent group of class 2. For instance the splitting extension of a cyclic group $G\not p\,(c)$ of order 4 by a dihedral group $G\not p\,(a, b;\ a^4 = b^2 = (a\,b)^2 = 1)$, a inducing the identity automorphism and b the inverting automorphism of $G\not p\,(c)$, embeds this amalgam, and is nilpotent of class 2. This amply demonstrates the importance of the amalgamating isomorphisms.

(ii) *Further, the amalgam is embeddable in no metabelian group; in other words, the generalised free GS_2-product does not exist.* For if it were, we would have a metabelian group with the generators a, b, c, d and further relations

$$a^4 = b^2 = (a\,b)^2 = c^4 = d^2 = (c\,d)^2 = 1, \qquad c^2 = b, \qquad a^2 = d.$$

Then, since $a^2 = [a, b]$ and our group is metabelian, the following chain of equalities is readily established:

$$[a, c] = [a, c]^{a^2} = [a, c]^d = [a, c^3] = [a, c]\,[a, c^2]^c = [a, c]\,[a, b]^c.$$

These entail that $[a, b] = 1$, that is, a collapse of the group A. In fact it is easy to see that any metabelian group satisfying the above relations must

be a homomorphic image of the four-group. On the other hand, the generalised free product F of the amalgam is soluble of length 3, because F/H is the free product of two cycles of order 2, which is metabelian. So the amalgam has the strange property that *every* group generated by it is soluble of length exactly 3.

(iii) *Nevertheless, the system satisfies the necessary conditions provided in Theorems* 5.4—5.6. The proof of this fact is fairly complicated, and we shall content ourselves with a brief outline.

Firstly we need some information on commutators in the free metabelian product G_0 of A and B. This is a metabelian group with generators and further relations as follows:

$$G_0 = Gp\left(a, b, c, d;\ a^4 = b^2 = (a\,b)^2 = c^4 = d^2 = (c\,d)^2 = 1\right).$$

Consider $[g, c^2]$, for any $g \in G_0$. Then, as $c^4 = 1$ and $c^2 \in G_0'$,

$$1 = [g, c^4] = [g, c^2]\,[g, c^2]^{c^2} = [g, c^2]^2,$$

that is, $[g, c^2]$ is either trivial or of order 2. We wish to show that $[a, c^2]$ and $[ab, c^2]$ are both of order exactly 2. To that end, we construct[10]) a group K which is a homomorphic image of G_0, in such a way that the images of these commutators are non-trivial. Let T be an elementary abelian group of order 8 with generators t_1, t_2, t_3, and consider the automorphisms π and $\varkappa$ of T defined by

$$t_1\pi = t_1 t_2, \qquad t_2\pi = t_2 t_3, \qquad t_3\pi = t_3,$$

$$t_1\varkappa = t_1, \qquad t_2\varkappa = t_2 t_3, \qquad t_3\varkappa = t_3.$$

It is routine to verify that π has order 4, $\varkappa$ and $\pi\varkappa$ have order 2, and therefore that π and $\varkappa$ together generate a dihedral group Δ of order 8. Our group K is the splitting extension of T by Δ:

$$K = Gp\,(t_1, t_2, t_3, \pi, \varkappa;\ t_1^2 = t_2^2 = t_3^2 = [t_1, t_2] = [t_1, t_3] = [t_2, t_3] = 1,$$

$$\pi^4 = \varkappa^2 = (\pi\varkappa)^2 = 1,$$

$$t_1^{\varkappa} = t_1, \qquad t_2^{\varkappa} = t_1 t_2, \qquad t_3^{\varkappa} = t_3,$$

$$t_1^{\pi} = t_1 t_2, \quad t_2^{\pi} = t_2 t_3, \quad t_3^{\pi} = t_3).$$

One readily sees that

a) K is nilpotent of class 3, therefore metabelian;

b) K may be generated by t_1, π and $\varkappa$;

c) $[t_1, \pi^2] = [t_1, \pi]\,[t_1, \pi]\,[[t_1, \pi], \pi] = [t_2, \pi] = t_3 \neq 1$.

Now, by virtue of the fact that G_0 is the *free* metabelian product of two dihedral groups of order 8, we see that the mapping which takes b onto 1,

[10]) I am grateful to Dr. M. F. Newman for this method of construction.

a onto t_1, c onto π and d onto $\varkappa$ may be extended to a homomorphism of the whole of G_0 onto K. Since $[a, c^2]$ and $[ab, c^2]$ are both mapped onto the non-trivial element $[t_2, \pi]$, they can neither of them be trivial. Consequently, by the above remarks, they are both of order 2; and a completely parallel argument shows that $[a^2, d]$ and $[a^2, cd]$ are also of order 2.

Next we have to show that the mapping δ of the set of all commutators of the form $[a, h\varphi]$ (with a ranging over A and h over H) onto $[A, H]$ defined by

$$[a, h\varphi]\,\delta = [a, h]$$

generates a homomorphism of $[A, H\varphi]$ onto $[A, H]$. This is equivalent to showing that any relation between the $[a, h\varphi]$ in $[A, H\varphi]$ is reflected as a relation between their images under δ in $[A, H]$. The proof of this fact, though based on completely elementary ideas, is very laborious, and we shall merely indicate how it goes. Since $[A, H\varphi]$ is abelian (the cartesian of any metabelian product is abelian), any relation is of the form $r = \prod_{a\in A, h\in H} [a, h\varphi]^{\lambda_{ah}} = 1$, and we have to show that likewise $r' = \prod_{a\in A, h\in H} [a, h]^{\lambda_{ah}} = 1$. Now the element r' is some power $a^{2\xi}$ of a. It is not hard to see that $[A, H\varphi]$ is generated by the commutators $[a, c^2]$, $[a, d]$, $[a^2, d]$,$[ab, c^2]$, $[ab, d]$, $[b, c^2]$ and $[b, d]$, and in terms of these new generators, suppose the powers to which $[a, c^2]$ and $[ab, c^2]$ occur in r are ϱ and σ respectively. It turns out that $\varrho+\sigma=\xi$, and the problem reduces to showing that $\varrho+\sigma$ is even. This we do by mapping G_0 once more onto K, this time by the rule $b\to 1$, $a\to t_1$, $c\to\pi$, $d\to\varkappa$. Then r goes over into $[t_1, \pi^2]^{\varrho+\sigma}$; since it is the identity, we conclude that $\varrho+\sigma$ is even, as required.

In a similar way we see that the mapping δ^0 of the set of all $[h, b]$ onto $[H\varphi, B]$ defined by

$$[h, b]\,\delta^0 = [h\varphi, b]$$

generates a homomorphism of $[H, B]$ onto $[H\varphi, B]$.

Lastly we have to establish the consonance between δ and δ^0 on the intersection $[A, H\varphi]\cap[H, B]$. This follows much the same sort of pattern as the previous proofs; one first shows that any element d of the intersection can be expressed on the one hand in the form

$$[a, c^2]^{\alpha_1}[a, d]^{\alpha_2}[a^2, d]^{\alpha_3}[ab, c^2]^{\alpha_4}[ab, d]^{\alpha_5}[b, c^2]^{\alpha_6}[b, d]^{\alpha_7},$$

and on the other hand in the form

$$[a^2, c]^{\beta_1}[b, c]^{\beta_2}[b, c^2]^{\beta_3}[a^2, cd]^{\beta_4}[b, cd]^{\beta_5}[b, c^2]^{\beta_6}[b, d]^{\beta_7}.$$

The image of d under δ is therefore $a^{2(\alpha_1+\alpha_4)}$, that under δ^0 is $c^{2(\beta_1+\beta_4)}$. Mapping G_0 onto K in the right way now gives that $[t_1, \pi^2]^{\alpha_1+\alpha_4}=1$, so that $\alpha_1+\alpha_4$ is even and $d\,\delta=1$. In the same way $d\,\delta^0=1$, and δ and δ^0 are indeed consonant. This completes the example.

I have no idea what extra conditions have to be added to obtain a set of necessary and sufficient conditions for the existence of the relevant generalised product; indeed they are likely to differ from product to product, and to increase in complication the further away one gets from second nilpotent products.

6. Metabelian products

We now take a closer look at the generalised GS_2-product of two groups with an amalgamation. Once again we consider an amalgam

$$\mathfrak{A}=(A, B;\ A\cap B=H)$$

and this time try and find out whether any conditions of a different sort from those in the preceding section are possibly necessary and sufficient for the existence of the generalised free GS_2-product of $\mathfrak{A}$.

Sufficient conditions immediately spring to mind; for instance that H be central in both constituents, or a free regular metabelian factor of them. In the first case the generalised direct product of $\mathfrak{A}$, and in the second case the free metabelian product of H with its metabelian complements in A and B, are generalised GS_2-products of $\mathfrak{A}$. (The first of these claims is trivially easy to justify, the second is still easy, though not trivial.)

Obvious necessary conditions are the following:

$$(6.1)\qquad [A'\cap H, B']=[B'\cap H, A']=[[A, H], A']=[[B, H], B']=E.$$

This follows immediately from the definition of GS_2-product; any generalised GS_2-product of $\mathfrak{A}$ satisfies

$$[A', B']=[G', [A, B]]=E.$$

That (6.1) are not also sufficient is readily verified. First observe that if both of A and B are nilpotent of class 2, (6.1) are automatically satisfied. Thus we only need to take the example of Neumann quoted in § 4, or Example 5.7 to see this. In fact it is not difficult to show that (6.1) are consequences of the necessary conditions given in Theorems 5.4 and 5.5; cf. Theorem 8.7 in [1].

In [2], B. H. Neumann shows that if $\mathfrak{A}=(A, B; A\cap B=H)$ is any amalgam such that A and B are soluble of lengths m and n respectively, and H is central in A, then any permutational product of $\mathfrak{A}$ is soluble of length not more than $m+n-1$. In particular, it follows that if A is abelian and B is metabelian, any permutational product of is metabelian; and therefore P is a generalised GS_2-product of $\mathfrak{A}$. We shall show just a little more than this, namely that if A is abelian and the amalgam satisfies (6.1) — which now condenses to the single requirement that $[[B, H], B']$ should be the unit

subgroup — then any permutational product of $\mathfrak{A}$ is a generalised GS_2-product of $\mathfrak{A}$.

Firstly note that in any permutational product P of $\mathfrak{A}$, the cartesian $[\varrho(A), \varrho(B)]$ is abelian, indeed 2.7 tells us that it is in the least variety containing $[B, H]$. All we have to show, then, is that

$$[\varrho(A'), \varrho(B')] = [P', [\varrho(A), \varrho(B)]] = E.$$

As A is abelian, this amounts to showing that $\varrho(B')$ commutes elementwise with $[\varrho(A), \varrho(B)]$.

LEMMA 6.2. *If $\mathfrak{A} = (A, B;\ A \cap B = H)$ is any amalgam such that H is central in A and $[[B, H], B'] = E$, then in any permutational product of the amalgam $\varrho(B')$ commutes elementwise with the cartesian $[\varrho(A), \varrho(B)]$.*

PROOF. Let S, T be left transversals of A and B respectively modulo H, and let W be the set of all triplets (s, t, h) with $s \in S$, $t \in T$, $h \in H$. To get our result we choose any elements a, b, b' out of A, B, B' respectively and show that the effects of $[\varrho(a), \varrho(b)]\,\varrho(b')$ and $\varrho(b')\,[\varrho(a), \varrho(b)]$ on an arbitrary triplet in W are identical. This is done by simple computation; in what follows the s_i and σ_i are in S, the t_i and τ_i in T, and the h_i and χ_i in H. Firstly

$$\begin{aligned}
(s, t, h)^{\varrho(a^{-1})} &= (s_1, t, h_1) && \text{where} && s\,h\,a^{-1} = s_1\,h_1;\\
(s_1, t, h_1)^{\varrho(b^{-1})} &= (s_1, t_1, h_2) && \text{where} && t\,h\,b_1^{-1} = t_1\,h_2;\\
(s_1, t_1, h_2)^{\varrho(a)} &= (s_2, t_1, h_3) && \text{where} && s_1\,h_2\,a = s_2\,h_3;\\
(s_2, t_1, h_3)^{\varrho(b\,b')} &= (s_2, t_2, h_4) && \text{where} && t_1\,h_3\,b\,b' = t_2\,h_4.
\end{aligned}$$

In the same way

$$\begin{aligned}
(s, t, h)^{\varrho(b')} &= (s, \tau_1, \chi_1) && \text{where} && t\,h\,b' = \tau_1\,\chi_1;\\
(s, \tau_1, \chi_1)^{\varrho(a^{-1})} &= (\sigma_1, \tau_1, \chi_2) && \text{where} && s\,\chi_1\,a^{-1} = \sigma_1\,\chi_2;\\
(\sigma_1, \tau_1, \chi_2)^{\varrho(b^{-1})} &= (\sigma_1, \tau_2, \chi_3) && \text{where} && \tau_1\,\chi_2\,b^{-1} = \tau_2\,\chi_3;\\
(\sigma_1, \tau_2, \chi_3)^{\varrho(a)} &= (\sigma_2, \tau_2, \chi_4) && \text{where} && \sigma_1\,\chi_3\,a = \sigma_2\,\chi_4;\\
(\sigma_2, \tau_2, \chi_4)^{\varrho(b)} &= (\sigma_2, \tau_3, \chi_5) && \text{where} && \tau_2\,\chi_4\,b = \tau_3\,\chi_5.
\end{aligned}$$

We have to show that $\sigma_2 = s_2$, $\tau_3 = t_2$, $\chi_5 = h_4$. Looking at the S-components first, and using throughout the fact that H is central in A, we get that

$$\begin{aligned}
s_2 &= s_1\,a\,h_2\,h_3^{-1} = s\,h\,h_1^{-1}\,h_2\,h_3^{-1},\\
\sigma_2 &= \sigma_1\,a\,\chi_3\,\chi_4^{-1} = s\,\chi_1\,\chi_2^{-1}\,\chi_3\,\chi_4^{-1}.
\end{aligned}$$

Consequently $s_2 = \sigma_2 = s$, $s_1 = \sigma_1$ and

$$1 = h\,h_1^{-1}\,h_2\,h_3^{-1} = \chi_1\,\chi_2^{1}\,\chi_3\,\chi_4^{-1}, \qquad h_2\,h_3^{-1} = \chi_3\,\chi_4^{-1}. \tag{6.3}$$

Next, the T-components:

$$\tau_3 = \tau_2 \chi_4 b \chi_5^{-1} = \tau_1 \chi_2 b^{-1} \chi_3 \chi_4^{-1} b \chi_5^{-1}$$
$$= t h b' \chi_1^{-1} \chi_2 b^{-1} \chi_3^{-1} \chi_4 b \chi_5^{-1} = t h b' [\chi_3^{-1} \chi_4, b] \chi_5^{-1},$$

since $\chi_1 \chi_2^{-1} \chi_3 \chi_4^{-1} = 1$ and H is abelian. Further

$$t_2 = t_1 h_3 b b' h_4^{-1} = t h_1 b^{-1} h_2^{-1} h_3 b b' h_4^{-1} = t h_1 h_2^{-1} h_3 [h_2^{-1} h_3, b] b' h_4^{-1}.$$

Applying (6.3) we see that

$$t_2 = t h [\chi_3^{-1} \chi_4, b] b' h_4^{-1}.$$

But by assumption B' centralises $[B, H]$, so that since $h_4 \in H$, $\chi_5 \in H$, we conclude that $t_2 = \tau_3$, and hence that $h_4 = \chi_5$. This finishes the proof of the lemma.

THEOREM 6.4. *Let $\mathfrak{A} = (A, B;\ A \cap B = H)$ be an amalgam where A is abelian and $[[B, H], B'] = E$. Then the generalised free GS_2-product of $\mathfrak{A}$ exists.*

PROOF. We form any permutational product P of the amalgam. First we remark that $\varrho(A') = E$, so that a fortiori $[\varrho(A'), \varrho(B')] = E$. Next, P' is generated by $\varrho(B')$ and $[\varrho(A), \varrho(B)]$; but now the cartesian is abelian, and the previous lemma gives that $\varrho(B')$ centralises the cartesian. But this means that the whole of P' centralises the cartesian, and hence that P is a generalised GS_2-product of $\mathfrak{A}$. But we know that if *any* GS_2-product exists, so does the *free* one ([*1*, Theorem 4.6]), and our theorem is proved.

We cannot in the proof of Theorem 6.4 replace the commutativity of A by the requirement that H be central in A; though it is likely that the result will still be true under this less restrictive assumption. This is about as far as one could hope to go in this direction, as the previous examples indicate. One can show that if $\mathfrak{A}$ satisfies the three conditions

$$[[B, H], B'] = [H, B'] = [A, H] = E,$$

then the generalised free GN_2-product of $\mathfrak{A}$ exists. This is again done with the use of permutational products, the only point to confirm being that in any permutational product, $\varrho(A')$ and $\varrho(B')$ commute elementwise: this is straightforward, and much the same in pattern as the proof of Lemma 6.3.

References

[*1*] WIEGOLD, J.: Nilpotent products of groups with amalgamations. Publ. Math. Debrecen **6**, 131—168 (1959).

[*2*] NEUMANN, B. H.: Permutational products of groups. J. Austral. Math. Soc. (in print).

[*3*] NEUMANN, B. H.: An essay on free products of groups with amalgamations. Phil. Trans. Roy. Soc. London A **246**, 503—554 (1954).

[*4*] WIEGOLD, J.: Nilpotent products of groups with amalgamations. Ph. D. Thesis, University of Manchester, 1958.

[5] GOLOVIN, O. N.: Nilpotent products of groups. Mat. Sb. **27** (69), 427—454 (1950). — Amer. Math. Soc. Transl. Ser. II **2**, 89—115 (1956).
[6] MORAN, S.: The homomorphic image of the intersection of a verbal subgroup and the cartesian subgroup of a free product. J. London Math. Soc. **33**, 237—245 (1958).
[7] NEWMAN, M. F.: On groups all of whose proper homomorphic images are nilpotent. Ph. D. Thesis, University of Manchester, 1960.
[8] BAER, R.: Free sums of groups and their generalizations. An analysis of the associative law. Amer. J. Math. **71**, 706—742 (1949).
[9] SCHREIER, O.: Die Untergruppen der freien Gruppen. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **5**, 161—183 (1927).
[10] NEUMANN, B. H., and HANNA NEUMANN: A contribution to the embedding theory of group amalgams. Proc. London Math. Soc. (3) **3**, 245—256 (1953).
[11] GOLOVIN, O. N.: On the metabelian product of groups. Mat. Sb. **28** (70), 431—444 (1951). — Amer. Math. Soc. Transl. Ser. II **2**, 117—131 (1956).
[12] MACHENRY, T. S.: The tensor product and the second nilpotent product of groups. Math. Z. **73**, 134—145 (1960).
[13] BIRKHOFF, G.: On the structure of abstract algebras. Proc. Cambridge Phil. Soc. **31**, 433—454 (1935).
[14] MORAN, S.: Associative operations on groups. I. Proc. London Math. Soc. (3) **6**, 581—596 (1956).

Department of Mathematics, University College, Keele, Staffs, (England)

(Eingegangen am 13. Mai 1960)

MacRobert, T. M.
Math. Zeitschr. 75, 79—82 (1961)

Fourier Series for E-functions

By
THOMAS M. MACROBERT

In a former paper [1] the expansion

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\Gamma(\tfrac{1}{2})\,E(p;\alpha_r:q;\varrho_s:z/\sin^2\tfrac{1}{2}\vartheta) = E\left(\begin{matrix}\tfrac{1}{2},\alpha_1,\ldots,\alpha_p:z\\ 1,\varrho_1,\ldots,\varrho_q\end{matrix}\right)+\\ &\qquad +2\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n}E\left(\begin{matrix}\tfrac{1}{2}+n,\alpha_1+n,\ldots,\alpha_p+n:z\\ 1+2n,\varrho_1+n,\ldots,\varrho_q+n\end{matrix}\right)\cos n\vartheta,\end{aligned}\right.$$

where $0\leqq\vartheta\leqq\pi$, $|\operatorname{amp} z|<\pi$, was obtained.

It will here be proved that, subject to the same conditions,

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &\Gamma(\tfrac{3}{2})\sin\vartheta\,E(p;\alpha_r:q;\varrho_s:z/\sin^2\vartheta)\\ &\qquad =\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}E\left(\begin{matrix}\tfrac{3}{2}+n,\alpha_1+n,\ldots,\alpha_p+n:z\\ 2+2n,\varrho_1+n,\ldots,\varrho_q+n\end{matrix}\right)\sin(2n+1)\vartheta.\end{aligned}\right.$$

The proof depends on the Fourier series

$$(3)\qquad \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\,\Gamma(2-\zeta)}{\Gamma(\frac{3}{2}-\zeta)}(\sin\vartheta)^{1-2\zeta}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\zeta;n)}{(2-\zeta;n)}\sin(2n+1)\vartheta,$$

where $0\leqq\vartheta\leqq\pi$, $R(1-2\zeta)\geqq 0$, and $(\zeta;0)=1$, $(\zeta;n)=\zeta(\zeta+1)\ldots(\zeta+n-1)$, $n=1,2,3,\ldots$.

In proving (3) certain integrals are required, based on the known integral [2, p. 340]

$$(4)\qquad \int_0^{\pi/2}\cos(m-n)\vartheta\,(\cos\vartheta)^{m+n-2}\,d\vartheta=\frac{\pi\,\Gamma(m+n-1)}{2^{m+n-1}\Gamma(m)\,\Gamma(n)},$$

where $R(m+n)>1$.

Now let $m-n$ be an integer and $R(m+n)>0$; then

$$\int_0^{\pi}\sin(m-n)\vartheta\,(\sin\vartheta)^{m+n-2}\,d\vartheta$$
$$=\int_0^{\pi/2}\sin(m-n)\vartheta\,(\sin\vartheta)^{m+n-2}\,d\vartheta-(-1)^{m-n}\int_0^{\pi/2}\sin(m-n)\varphi\,(\sin\varphi)^{m+n-2}\,d\varphi,$$

where $\varphi=\pi-\vartheta$.

Hence, if $m-n$ is an even integer, $R(m+n)>0$,

$$(5)\qquad \int_0^{\pi}\sin(m-n)\vartheta\,(\sin\vartheta)^{m+n-2}\,d\vartheta=0;$$

while, if $m-n$ is an odd integer $R(m+n)>2$,

$$\int_0^{\pi}\sin(m-n)\vartheta\,(\sin\vartheta)^{m+n-2}\,d\vartheta = 2\int_0^{\pi/2}\sin(m-n)\vartheta\,(\sin\vartheta)^{m+n-2}\,d\vartheta$$
$$=\int_0^{\pi/2}\cos(m-n-1)\vartheta\,(\sin\vartheta)^{m+n-3}\,d\vartheta-\int_0^{\pi/2}\cos(m-n+1)\vartheta\,(\sin\vartheta)^{m+n-3}\,d\vartheta$$
$$=(-1)^{\frac{1}{2}(m-n-1)}\left[\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos(m-n-1)\vartheta\,(\cos\vartheta)^{m+n-3}\,d\vartheta\\ \displaystyle+\int_0^{\pi/2}\cos(m-n+1)\vartheta\,(\cos\vartheta)^{m+n-3}\,d\vartheta\end{array}\right],$$

and from (4) it follows that this is equal to

$$(-1)^{\frac{1}{2}(m-n-1)}\left[\frac{\pi\Gamma(m+n-2)}{2^{m+n-2}\Gamma(m-1)\Gamma(n)}+\frac{\pi\Gamma(m+n-2)}{2^{m+n-2}\Gamma(m)\Gamma(n-1)}\right].$$

Hence, if $m-n$ is an odd integer and if $R(m+n)>0$,

$$(6)\qquad \int_0^{\pi}\sin(m-n)\vartheta\,(\sin\vartheta)^{m+n-2}\,d\vartheta=(-1)^{\frac{1}{2}(m-n-1)}\frac{\pi\Gamma(m+n-1)}{2^{m+n-2}\Gamma(m)\Gamma(n)}.$$

Now, let

$$(\sin\vartheta)^{1-2\zeta}=\sum_{r=1}^{\infty}a_r\sin r\vartheta,$$

where $0\leqq\vartheta\leqq\pi$, $R(1-2\zeta)\geqq 0$.

Then, if r is even,

$$\tfrac{1}{2}\pi a_r=\int_0^{\pi}\sin r\vartheta\,(\sin\vartheta)^{1-2\zeta}\,d\vartheta=0$$

by (5); while, if r is odd, say $r=2n+1$,

$$\frac{1}{2}\pi a_{2n+1}=\int_0^{\pi}\sin(2n+1)\vartheta\,(\sin\vartheta)^{1-2\zeta}\,d\vartheta=(-1)^n\frac{\pi\Gamma(2-2\zeta)}{2^{1-2\zeta}\Gamma(2-\zeta+n)\Gamma(1-\zeta-n)},$$

by (6). Hence

$$a_{2n+1}=\frac{\Gamma(2-2\zeta)\,(\zeta;n)}{2^{-2\zeta}\Gamma(2-\zeta)\Gamma(1-\zeta)\,(2-\zeta;n)}$$
$$=\frac{2\Gamma(\frac{3}{2}-\zeta)\,(\zeta;n)}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(2-\zeta)\,(2-\zeta;n)};$$

and from this (3) is obtained.

The Barnes integral [2, p. 374]

$$(7)\qquad E(p;\alpha_r:q;\varrho_s:z)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\Gamma(\zeta)\Pi\Gamma(\alpha_r-\zeta)}{\Pi\Gamma(\varrho_s-\zeta)}z^{\zeta}\,d\zeta$$

will also be required. Here the integral is taken up the η-axis, with loops, if necessary, to ensure that the origin lies to the left of the contour and the points $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p$ to the right of the contour. Zero and negative integral values of the α's and ϱ's are excluded, and the α's must not differ by integral

values. When $p<q+1$ the contour is bent to the left at each end. The formula holds for $|\operatorname{amp} z|<\pi$, and for $|\operatorname{amp} z|<\frac{1}{2}(p-q+1)\pi$ if $p>q+1$.

Now, from (7), the expression on the right of (2) can be written

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{-n}}{2\pi i}\int\frac{\Gamma(\zeta)\,\Gamma(\frac{3}{2}+n-\zeta)\,\Pi\Gamma(\alpha_r+n-\zeta)}{\Gamma(2+2n-\zeta)\,\Pi\Gamma(\varrho_s+n-\zeta)}\,z^{\zeta}\,d\zeta\,\sin(2n+1)\,\vartheta.$$

Here replace ζ by $\zeta+n$ and then change the order of summation and integration, so getting

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\Gamma(\zeta)\,\Gamma(\frac{3}{2}-\zeta)\,\Pi\Gamma(\alpha_r-\zeta)}{\Gamma(2-\zeta)\,\Pi\Gamma(\varrho_s-\zeta)}\,z^{\zeta}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\zeta;n)}{(2-\zeta;n)}\sin(2n+1)\,\vartheta\right\}d\zeta;$$

and, on applying (3), the expression on the left of (2) is obtained.

From (1) and (2) the integrals

$$\text{(8)}\qquad\left\{\begin{aligned}&\int_0^{\pi}\cos n\vartheta\,E(p;\alpha_r:q;\varrho_s:z/\sin^2\tfrac{1}{2}\vartheta)\,d\vartheta\\&\qquad=\Gamma(\tfrac{1}{2})\,z^{-n}E\left(\begin{matrix}\frac{1}{2}+n,\alpha_1+n,\ldots,\alpha_p+n\\1+2n,\varrho_1+n,\ldots,\varrho_q+n\end{matrix}:z\right),\end{aligned}\right.$$

$$\text{(9)}\qquad\left\{\begin{aligned}&\int_0^{\pi}\sin(2n+1)\,\vartheta\sin\vartheta\,E(p;\alpha_r:q;\varrho_s:z/\sin^2\vartheta)\,d\vartheta\\&\qquad=\Gamma(\tfrac{1}{2})\,z^{-n}E\left(\begin{matrix}\frac{3}{2}+n,\alpha_1+n,\ldots,\alpha_p+n\\2+2n,\varrho_1+n,\ldots,\varrho_q+n\end{matrix}:z\right),\end{aligned}\right.$$

where $n=0, 1, 2, \ldots$, can be deduced.

Now the integral in (8) can be written

$$2\int_0^{\pi/2}\cos 2n\varphi\,E(p;\alpha_r:q;\varrho_s:z/\sin^2\varphi)\,d\varphi,$$

and, since this is equal to the same integral from 0 to π, (8) can be written

$$\text{(10)}\qquad\left\{\begin{aligned}&\int_0^{\pi}\cos n\,2n\varphi\,E(p;\alpha_r:q;\varrho_s:z/\sin^2\varphi)\,d\varphi\\&\qquad=\Gamma(\tfrac{1}{2})\,z^{\ n}E\left(\begin{matrix}\frac{1}{2}+n,\alpha_1+n,\ldots,\alpha_p+n\\1+2n,\varrho_1+n,\ldots,\varrho_q+n\end{matrix}:z\right).\end{aligned}\right.$$

Hence, on writing $\sin(2n+1)\,\vartheta\sin\vartheta$ in (9) in the form

$$\tfrac{1}{2}\{\cos 2n\vartheta-\cos(2n+2)\,\vartheta\}$$

and applying (10), the relation

$$\text{(11)}\qquad\left\{\begin{aligned}&E\left(\begin{matrix}\frac{1}{2}+n,\alpha_1+n,\ldots,\alpha_p+n\\1+2n,\varrho_1+n,\ldots,\varrho_q+n\end{matrix}:z\right)-z^{-1}E\left(\begin{matrix}\frac{3}{2}+n,\alpha_1+n+1,\ldots,\alpha_p+n+1\\3+2n,\varrho_1+n+1,\ldots,\varrho_q+n+1\end{matrix}:z\right)\\&\qquad=2E\left(\begin{matrix}\frac{3}{2}+n,\alpha_1+n,\ldots,\alpha_p+n\\2+2n,\varrho_1+n,\ldots,\varrho_q+n\end{matrix}:z\right)\end{aligned}\right.$$

is obtained.

This is a special case of the relation

$$(12)\qquad \left\{ E\left(\begin{matrix} h, \alpha_1, \ldots, \alpha_p : z \\ 2h, \varrho_1, \ldots, \varrho_q \end{matrix}\right) - z^{-1} E\left(\begin{matrix} h+1, \alpha_1+1, \ldots, \alpha_p+1 : z \\ 2h+2, \varrho_1+1, \ldots, \varrho_q+1 \end{matrix}\right) \right. \\ \left. = 2E\left(\begin{matrix} h+1, \alpha_1, \ldots, \alpha_p : z \\ 2h+1, \varrho_1, \ldots, \varrho_q \end{matrix}\right), \right.$$

which can be verified by comparing coefficients in the case $p=q=0$, and then generalising.

References

[1] MACROBERT, T. M.: Math. Z. **71**, 143—145 (1959).
[2] MACROBERT, T. M.: Functions of a Complex Variable, 4th edit. London 1954.

Dept. of Math., University of Glasgow (Scotland)

(Eingegangen am 30. Mai 1960)

Felscher, W.
Math. Zeitschr. 75, 83—114 (1961)

Jordan-Hölder-Sätze und modular geordnete Mengen

Von
Walter Felscher*

Der Jordansche Satz, daß die Hauptreihen einer Gruppe alle gleich lang sind, wurde bereits von Dedekind als Spezialfall eines Satzes über modulare Verbände erkannt (Dedekind [*1*], § 6, Th. XVI); spätere Autoren haben nicht nur den Jordan-Hölderschen Satz über die Kompositionsreihen einer Gruppe aus verbands- oder ordnungstheoretischen Sätzen abgeleitet, sondern sogar noch Verschärfungen gefunden, welche weit über die klassischen Ergebnisse hinausreichen. Weiterhin war es ebenfalls schon Dedekind bekannt (Dedekind [*1*], § 6, Th. X), daß ein Verband genau dann modular ist, wenn in jedem seiner Teilverbände eine Aussage gilt — die „Jordan-Dedekindsche Kettenbedingung" — welche der Behauptung des Jordanschen Satzes über die Hauptreihen einer Gruppe entspricht. Zu diesen Beziehungen zwischen Kettensätzen und Modularität kamen neue, verwickeltere hinzu, als man die Forderung nach Modularität der untersuchten Verbände abschwächen mußte, um den Jordan-Hölderschen Satz über die Kompositionsreihen einer Gruppe aus verbandstheoretischen Überlegungen spezialisieren zu können.

Dies nun ist Gegenstand des vorliegenden Aufsatzes: Es soll die Gültigkeit der Kettensätze vom Typus des Jordan-Hölderschen für geordnete Mengen (partially ordered sets) untersucht und die zu beweisenden unter diesen Sätzen sollen aus einem Punkte und zusammenhängend entwickelt werden. Umgekehrt findet man Charakterisierungen von Klassen geordneter Mengen je nach den Voraussetzungen, die für verschiedene Kettensätze gemacht werden müssen; die modular geordneten Mengen werden dabei eingeführt als solche, in denen diesen Zwecken ganz besonders günstige Verhältnisse vorliegen, und die Verbände unter ihnen sind genau die modularen Verbände. Die Abstraktion von Verbänden zu geordneten Mengen — zuerst von Ore [*1*] durchgeführt — ist dabei angebracht, um die Beziehungen zwischen Kettensätzen und Modularität (nebst ihren verschiedenen Abschwächungen) in ein helles Licht zu bringen: neben den Gesetzen treten auch ihre Gründe deutlicher hervor, und es zeigt sich die Verwandtschaft der verschiedenen Begriffe. Sie ist überdies notwendig, um schon die *Verbände* zu kennzeichnen, in denen gewisse Kettensätze gelten: Sätze nämlich, die von den Beziehungen handeln, welche zwischen endlichen, nicht mehr zu verfeinernden Ketten bestehen — die Gesamtheit der durch solche Ketten zu verbindenden Verbandselemente, die der natürliche Bereich für die Untersuchung derartiger Sätze ist, bildet im Allgemeinen aber keinen Verband mehr. Und will man die Theorie der

*) Habilitationsschrift Freiburg i. Br. 1960.

Kompositionsreihen in Gruppen aus verbands- oder ordnungstheoretischen Sätzen spezialisieren, so hat man die Menge der nachinvarianten Untergruppen zu betrachten, die gleichfalls nicht ohne Weiteres ein Verband ist.

Im Einzelnen wird zunächst im Teil 0 die verwendete Terminologie beschrieben. Im Teil 1 wird die Theorie der Intervallfunktionen in geordneten Mengen entwickelt — die Gültigkeit gewisser Kettensätze läßt sich dann kennzeichnen durch die Additivität aller Elemente einer solchem Kettensatze zugeordneten Schar von Intervallfunktionen; für den einfachsten solcher Kettensätze, die Jordan-Dedekindsche Kettenbedingung, wurde eine derartige Kennzeichnung schon von KOŘINEK [2], [3] (Abschnitt 5) vorbereitet. Teil 2 bringt, anknüpfend an ORE [1] und BENADO [4], die Reduktionstheorie der Jordan-Hölder-Sätze. Betrachtet man den Hölderschen Beweis seines berühmten Satzes (HÖLDER [1], p. 37), so liegt dort die Hauptarbeit im Nachweis jenes Sachverhaltes, der von der heute meist als erstem Isomorphiesatz bezeichneten Aussage beschrieben wird; ist dieser einmal bewiesen, dann bleibt als Rest des Beweises nur noch das schematische Umformen gewisser Hilfs-Kompositionsreihen, wie es schon im Beweis des Jordanschen Satzes auftritt (JORDAN [1], p. 42). Diese Beobachtung legt es nahe, den Beweis von Kettensätzen in geordneten Mengen auf solche Fälle zu reduzieren, in denen die betrachteten Ketten sich in dafür geeigneter Lage (wie jener mit dem ersten Isomorphiesatz zu behandelnden) befinden, und diese Zurückführung vermöge des Studiums bestimmter schematischer Umformungen von Hilfsketten. Die dem Verfasser erst nach Fertigstellung dieser Arbeit bekannt gewordenen Ergebnisse von KOLIBIAR [1] sind Spezialfälle der hier angegebenen Reduktionsverfahren. Im Teil 3 werden Bedingungen untersucht, deren Erfülltsein in geordneten Mengen dann Kettensätze für Ketten in bestimmter günstiger Lage trivial werden läßt; außerdem erlauben manche jener Bedingungen noch, aus dem Vorhandensein einer endlichen, nicht mehr zu verfeinernden Kette zwischen zwei Elementen zu schließen auf die Endlichkeit aller weiteren, einer gegebenen Klasse (etwa der aller wohlgeordneten Ketten) angehörenden Ketten zwischen diesen Elementen. Dabei handelt es sich um Varianten der Birkhoffschen Semimodularitäts-Bedingungen (BIRKHOFF [1], [2]) und der Oreschen quadrilateral condition (ORE [1]); Untersuchungen von CROISOT [1], SZAS [1] und VILHELM [1], [2] werden weitergeführt. Im Teil 4 werden die Beziehungen von Kettensätzen zu der binären Relation der Perspektivität zwischen Intervallen einer geordneten Menge untersucht; in Verallgemeinerung der Arbeiten von KOŘINEK [2], [3], [4] und VILHELM [2] wird gezeigt, daß mit verschiedenen Begriffen definierte Kettensätze einander bedingen, und es werden die Klassen geordneter Mengen charakterisiert, in denen gewisse Kettensätze gelten. Insbesondere läßt sich eine von KOŘINEK herrührende Kennzeichnung des Gültigkeitsbereiches eines bestimmten Kettensatzes verallgemeinern: bisher mußte von den dabei in Betracht gezogenen geordneten Mengen vorausgesetzt werden, daß alle beschränkten Ketten in ihnen endlich seien — von dieser Voraussetzung kann jetzt ganz abgesehen werden. Denn man kann zeigen, daß das Studium jenes

Kettensatzes sich schon innerhalb einer wohlbestimmten Teilmenge der gegebenen geordneten Menge abspielt (und auch wenn ein Verband vorliegt, wird diese Teilmenge im Allgemeinen kein Verband mehr sein), und für diese können die früher geforderten Voraussetzungen jetzt bewiesen werden. Im Teil 5 werden die modular geordneten Mengen auf zahlreiche Arten beschrieben: durch Additivitäts- oder Invarianzeigenschaften von Intervallfunktionen und durch Eigenschaften der Äquivalenzklassen, die zu der durch die Perspektivität erzeugten Äquivalenzrelation gehören. Die bei modularen Verbänden hier übliche Voraussetzung (KOŘINEK [2], [3]), daß alle beschränkten Ketten endlich seien, läßt sich beweisen aus der schwächeren Forderung, daß zwischen vergleichbaren Elementen wenigstens eine endliche, nicht mehr zu verfeinernde Kette existiere. Im Teil 6 schließlich wird gezeigt, wie Sätze über Kompositionsreihen einer Gruppe g, die bisher aus dem Schreierschen Verfeinerungstheorem gefolgert wurden, aus früher bewiesenen Kettensätzen spezialisiert werden können, wenn diese auf die geordnete Menge der nachinvarianten Untergruppen von g angewendet werden.

0. Allgemeine Bemerkungen über geordnete Mengen. Eine *geordnete Menge* ist ein Paar $(E, \leqq)$, bestehend aus einer Menge E und einer Ordnung $\leqq$ auf E; dabei heißt eine binäre Relation auf E (also eine Teilmenge der Menge $E \times E$ aller Paare aus E) *Ordnung*, wenn sie reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist (also für alle a, b, c aus E: $a \leqq a$; $a \leqq b$ und $b \leqq c$ impliziert $a \leqq c$; $a \leqq b$ und $b \leqq a$ impliziert $a = b$); jede Teilmenge M von E bestimmt eine geordnete Menge $(M, \leqq_M)$ mit $\leqq_M$ als der Spur von $\leqq$ auf M (wobei für a, b aus M genau dann $a \leqq_M b$, wenn $a \leqq b$). Zugleich mit der Relation $\leqq$ ist auch die inverse Relation $\geqq$ eine Ordnung auf E (mit $a \geqq b$ genau dann, wenn $b \leqq a$), welche als zu $\leqq$ *duale* Ordnung bezeichnet wird; ist $(X^{\vee})$ ein Prädikat, das von geordneten Mengen erfüllt werden kann, so sei das Prädikat $(X^{\wedge})$ für $(E, \leqq)$ genau dann erfüllt, wenn $(X^{\vee})$ für $(E, \geqq)$ erfüllt ist; $(X^{\wedge})$ heißt dann auch dual zu $(X^{\vee})$. Sind a, b Elemente von E und gilt weder $a \leqq b$ noch $b \leqq a$, so schreibe man $a \parallel b$ und nenne a, b *unvergleichbar* (HAUSDORFF [1], p. 139); sind a, b, c Elemente von E und gilt $a \leqq c \leqq b$, so heiße c ein Element *zwischen* a, b; $a \leqq b$ vorausgesetzt, werde die Menge aller c zwischen a, b als das *Intervall* $[a, b]$ von $(E, \leqq)$ bezeichnet. Sind a, b Elemente von E und ist a *unterer Nachbar* von b (gleichbedeutend: b oberer Nachbar von a), das heißt, besteht $[a, b]$ aus genau zwei Elementen, so schreibe man $a \lhd b$; das Intervall $[a, b]$ heiße dann ein $\lhd$-*Intervall*. Die Relation $\lhd$ ist in der Ordnung $\leqq$ enthalten; sie erzeugt daher (als Durchschnitt aller sie enthaltenden Ordnungen) eine Ordnung $\lhd\lhd$ auf E, welche der *diskrete Teil* von $\leqq$ heißt; stimmt $\lhd\lhd$ mit $\leqq$ überein, so heiße $\leqq$ *diskret*, $(E, \leqq)$ *diskret geordnet* (für die Beziehungen zwischen $\leqq$, $\lhd$ und $\lhd\lhd$ vergleiche man FELSCHER-SCHMIDT [1]).

Eine nicht leere Teilmenge K von E heiße *Kette* in $(E, \leqq)$, wenn $(K, \leqq_K)$ sogar *total* geordnet ist (also für alle a, b aus K: $a \leqq b$ oder $b \leqq a$); ist K eine Kette in $(E, \leqq)$, liegen a, b in K, und ist a untere, b obere Schranke in $(E, \leqq)$ von K, so heiße K eine Kette *zwischen* a, b; für eine Kette K sei $\lhd_K$ die

Nachbarschaftsrelation von $(K, \leqq_K)$ (nicht die Spur von $\lhd$ auf K!) und K^* die Menge aller Intervalle $[a, b]$ von $(K, \leqq_K)$ mit $a \lhd_K b$. Eine Kette L in $(E, \leqq)$ heiße *Verfeinerung* in $(E, \leqq)$ der Kette K in $(E, \leqq)$, wenn $K \subseteq L$ und jedes Element von L zwischen Elementen von K gelegen ist; eine Kette in $(E, \leqq)$ heiße *Ultrakette* in $(E, \leqq)$, wenn sie ihre einzige Verfeinerung in $(E, \leqq)$ ist. Nennt man *maximale Ketten* in $(E, \leqq)$ die maximalen Elemente der durch die Inklusionsbeziehung geordneten Menge aller Ketten in $(E, \leqq)$, so ist jede maximale Kette in $(E, \leqq)$ auch Ultrakette in $(E, \leqq)$, und eine Kette K ist genau dann Ultrakette in $(E, \leqq)$, wenn sie maximale Kette ist in ihrer (durch die Spur von $\leqq$ geordneten) *konvexen Hülle*: der Teilmenge aller der Elemente von E, welche zwischen Elementen von K liegen. Für a, b aus E gilt $a \lhd\lhd b$ genau dann, wenn es eine endliche Ultrakette in $(E, \leqq)$ zwischen a, b gibt; das Studium der endlichen Ultraketten in $(E, \leqq)$ läuft daher auf das Studium der Relation $\lhd\lhd$ hinaus, ist mithin Studium einer auf bestimmte Weise aus der Ordnung $\leqq$ abgeleiteten Ordnung.

Die geordnete Menge $(E, \leqq)$ heiße [*beschränkt*] *absteigend längenendlich*, wenn jede nicht leere [nach unten beschränkte] Teilmenge von E wenigstens ein minimales Element enthält; gleichwertig dazu ist, daß jede [nach unten beschränkte] Kette in $(E, \leqq)$ wohlgeordnet ist (die Verwendung des Auswahlaxioms an dieser Stelle ist für das Folgende nicht wesentlich). Dual erklärt man, wann $(E, \leqq)$ [beschränkt] aufsteigend längenendlich sei, und ist $(E, \leqq)$ sowohl [beschränkt] aufsteigend wie [beschränkt] absteigend längenendlich, so heiße $(E, \leqq)$ [*beschränkt*] *längenendlich* (KLEIN [*1*] und HERMES [*1*] nennen längenendlich, was hier beschränkt längenendlich heißt) — dies ist genau dann der Fall, wenn alle [zwischen irgend zwei Elementen gelegenen] Ketten in $(E, \leqq)$ endlich sind. Eine geordnete Menge ist genau dann beschränkt längenendlich, wenn jede ihrer Teilmengen (durch die Spur ihrer Ordnung) diskret geordnet ist (FELSCHER-SCHMIDT [*1*], p. 91); eine absteigend längenendliche geordnete Menge besitzt genau dann ein kleinstes Element, wenn sie nach unten gerichtet ist. Ist K eine Kette in $(E, \leqq)$, so betrachte man für a, b aus K die Aussage: wenn $a \lhd_K b$, so $a \lhd b$; sie ist notwendig dafür, daß K Ultrakette in $(E, \leqq)$ sei (so daß, falls K Ultrakette in $(E, \leqq)$, dann K^* die Menge der $\lhd$-Intervalle $[a, b]$ von $(E, \leqq)$ mit a, b aus K ist); ist K endlich oder ist $(E, \leqq)$ beschränkt längenendlich, so ist sie dafür auch hinreichend.

Seien a, b Elemente von E, $(E, \leqq)$ geordnet; falls $a \parallel b$ und es überhaupt obere Schranken von $\{a, b\}$ gibt, so besitzt $\{a, b\}$ genau dann kein Supremum, wenn die Menge der oberen Schranken von $\{a, b\}$ verschiedene minimale Elemente enthält oder wenn es in dieser Menge eine absteigende (das heißt, als durch die Spur von $\leqq$ geordnete Menge dual wohlgeordnete) unendliche Kette gibt, die in dieser Menge keine untere Schranke besitzt. Tritt der zweite Fall nicht ein, gilt also für alle a, b aus E, daß es unter jeder oberen Schranke von $\{a, b\}$ eine minimale obere Schranke von $\{a, b\}$ gibt, so heiße $(E, \leqq)$ *Multiverband nach oben*; dual erklärt man den Begriff Multiverband nach unten, und ist $(E, \leqq)$ sowohl nach oben wie nach unten Multiverband,

so heiße $(E, \leqq)$ *Multiverband* schlechthin (Benado [2], [3], [4], [5]). Eine beschränkt absteigend längenendliche geordnete Menge ist Multiverband nach oben, eine beschränkt längenendliche geordnete Menge ist Multiverband.

1. Intervallfunktionen. 1.0. Sei f eine Funktion, welche gewissen Intervallen $[a, b]$ der geordneten Menge $(E, \leqq)$ je ein Element $f(a, b)$ einer bestimmten Wertmenge G zuordnet; der Definitionsbereich von f bestimmt dann eindeutig eine binäre Relation $\leqq_f$ auf E: $a \leqq_f b$ genau dann, wenn $[a, b]$ ein Intervall von $(E, \leqq)$ aus dem Definitionsbereich von f ist; $\leqq$ ist gröber als $\leqq_f$: aus $a \leqq_f b$ folgt $a \leqq b$ für alle a, b; f heiße dann eine *Intervallfunktion auf* $(E, \leqq)$ *über* $\leqq_f$. Die Intervallfunktion f heiße *additiv*, wenn G ein Modul ist, $\leqq_f$ transitiv ist, und weiterhin gilt

(A_1) *für alle* a, b, c *aus* E: *aus* $a \leqq_f c \leqq_f b$ *folgt* ($a \leqq_f b$ *und*) $f(a, b) = f(a, c) + f(c, b)$.

Die Relation $\leqq_f$ ist, da feiner als $\leqq$, stets antisymmetrisch; deshalb kann man ein additives f natürlich zu einem ebenfalls additiven f^ν fortsetzen, für welches $\leqq_{f^\nu}$ eine Ordnung ist: $f^\nu(a, b) = f(a, b)$, falls $a \leqq_f b$; $f^\nu(a, a) = 0$, falls nicht $a \leqq_f a$; 0 die Null von G. Mithin kann man sich auf die Betrachtung additiver Intervallfunktionen f über einer Ordnung $\leqq_f$ beschränken.

1.1. In diesem Abschnitt werden nur solche additiven Intervallfunktionen betrachtet, für die $\leqq_f$ gleich $\leqq$ ist; der allgemeine Fall ergibt sich dann durch Relativierung. — Jede auf E, $(E, \leqq)$ geordnet, definierte (Punkt-)Funktion g mit Werten in einem Modul G bestimmt eine additive Intervallfunktion φg auf $(E, \leqq)$ durch die Vorschrift $\varphi g(a, b) = g(b) - g(a)$ für alle a, b mit $a \leqq b$; gilt $\varphi g_1 = \varphi g_2$, so unterscheiden sich g_1, g_2 auf jeder Zusammenhangsklasse von $(E, \leqq)$ nur um eine Konstante (dabei bezeichnet man als Zusammenhangsklasse von $(E, \leqq)$ eine Äquivalenzklasse der von $\leqq$ erzeugten Äquivalenzrelation; gibt es nur eine Zusammenhangsklasse — etwa, wenn $(E, \leqq)$ nach oben oder nach unten gerichtet ist — so nennt man $(E, \leqq)$ auch zusammenhängend). Ist $(E, \leqq)$ nach oben oder nach unten gerichtet, so bestimmt umgekehrt jede additive Intervallfunktion f auf $(E, \leqq)$ zu jedem a aus E eine (Punkt-)Funktion $\psi_a f$ auf E durch folgende Konstruktion (für einen Spezialfall angegeben von Klein [1], Th. 6, und Klein [3], Th. 7): man setze $f^*(a, b) = f(a, b)$ für alle a, b mit $a \leqq b$; falls aber $a \parallel b$ und etwa $(E, \leqq)$ nach oben gerichtet ist, so wähle man eine obere Schranke c von $\{a, b\}$ und setze $f^*(a, b) = f(a, c) - f(b, c)$ (ist $(E, \leqq)$ weder nach oben noch nach unten Halbverband, so läßt sich zur Konstruktion von f^* das Auswahlaxiom nicht umgehen); schließlich noch $f^*(a, b) = -f^*(b, a)$ für alle a, b. Man erkennt sofort, daß für unvergleichbare a, b der Wert $f^*(a, b)$ nicht von der Wahl des Elementes c abhängt und daß f^* für alle a, b, c aus E der Bedingung $f^*(a, b) = f^*(a, c) + f^*(c, b)$ genügt. Für a aus E erkläre man nun $\psi_a f(x) = f^*(a, x)$; zwei Funktionen $\psi_a f$ und $\psi_b f$ unterscheiden sich dann nur um die Konstante $f^*(a, b)$. Man findet für additive Intervallfunktionen f auf $(E, \leqq)$ und alle a aus E stets $\varphi \psi_a f = f$ und für (Punkt-)Funktionen g auf E auch $\psi_a \varphi g = g - g(a)$.

1.2. Sei h eine Funktion, welche für alle a, b aus E, $(E, \leqq)$ geordnet, jeder endlichen Ultrakette K zwischen a, b ein Element $h(a, b, K)$ eines Moduls G zuordnet, $h(a, a, K) = 0$ für alle a aus E, 0 die Null von G; h heiße eine *Kettenfunktion* auf $(E, \leqq)$ über $\lhd\lhd$. h bestimmt dann eine Schar von Intervallfunktionen ϑh über $\lhd\lhd$, indem man als $\vartheta h(a, b)$ jeweils eines unter den Elementen $h(a, b, K)$ auswählt (bei den folgenden Anwendungen werden sich solche Intervallfunktionen stets ohne Verwendung des Auswahlaxioms konstruieren lassen). Es werde nun noch vorausgesetzt, daß h *additiv* sei:

(A_2) *für alle a, b, c aus E: für alle endlichen Ultraketten K zwischen a, b: wenn c in K, so*
$h(a, b, K) = h(a, c, K \cap [a, c]) + h(c, b, K \cap [c, b])$.

Dann ist die Aussage

(A_3) *für alle a, b aus E: für alle endlichen Ultraketten K, L zwischen a, b:*
$h(a, b, K) = h(a, b, L)$

äquivalent dazu, daß eine der Intervallfunktionen ϑh additiv sei; in diesem Falle sind dann alle Funktionen ϑh identisch. Dabei ist die Notwendigkeit des Additivseins klar. Sei umgekehrt eine Funktion ϑh additiv, seien K, L endliche Ultraketten zwischen a, b mit $h(a, b, K) \neq h(a, b, L)$, also etwa $\vartheta h(a, b) \neq h(a, b, K)$; man wähle x in K minimal für $\vartheta h(a, x) \neq h(a, x, K \cap [a, x])$. Dann ist x von a verschieden, so daß man ein y in K mit $y \lhd x$ findet; da es zwischen y, x nur eine Ultrakette gibt, gilt $\vartheta h(y, x) = h(y, x, K \cap [y, x])$, wegen $\vartheta h(a, y) = h(a, y, K \cap [a, y])$ also $\vartheta h(a, x) = h(a, x, K \cap [a, x])$: Widerspruch.

1.3. Sei β eine Menge von Intervallen der geordneten Menge $(E, \leqq)$; man definiert eine ganzwertige und additive Kettenfunktion h_β auf $(E, \leqq)$ über $\lhd\lhd$, indem man für $h_\beta(a, b, K)$ die Elementeanzahl von $K^* \cap \beta$ setzt; man definiert eine wieder mit h_β bezeichnete Intervallfunktion auf $(E, \leqq)$ über $\lhd\lhd$, indem man für $h_\beta(a, b)$ die kleinste aller Zahlen $h_\beta(a, b, K)$ setzt; für alle a, b, c folgt aus $a \lhd\lhd c \lhd\lhd b$ dann $h_\beta(a, b) \leq h_\beta(a, c) + h_\beta(c, b)$.

Unter dem auf Intervalle sich beziehenden Jordan-Hölder-Satz für eine binäre, reflexive, symmetrische Relation $\mathfrak{R}$ zwischen Intervallen einer geordneten Menge $(E, \leqq)$ wird man die folgende Aussage verstehen:

($JHI_{\mathfrak{R}}$) *für alle a, b aus E: für alle endlichen Ultraketten K, L zwischen a, b: es existiert eine umkehrbare Abbildung von K^* auf L^* so, daß zugeordnete Intervalle in der Relation $\mathfrak{R}$ stehen.*

Sei $\mathfrak{R}$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Intervalle von $(E, \leqq)$, $\mathfrak{R}_{\lhd}$ ihre Spur auf der Menge aller $\lhd$-Intervalle (umgekehrt kann jede auf der Menge aller $\lhd$-Intervalle gegebene Äquivalenzrelation in trivialer Weise auf die Menge aller Intervalle von $(E, \leqq)$ fortgesetzt werden), P sei die zu $\mathfrak{R}$ gehörige Partition der Menge aller Intervalle von $(E, \leqq)$ in Restklassen ϱ;

nach der soeben angegebenen Konstruktion bestimmt P eine Schar von Intervallfunktionen h_ϱ auf $(E, \leqq)$ über $\lhd\lhd$, ϱ in P. *Dann ist die Gültigkeit von* $(JHI_{\mathscr{R}})$ *äquivalent dazu, daß alle Intervallfunktionen* h_ϱ *additiv seien,* ϱ *in* P.

Eine Intervallfunktion f auf $(E, \leqq)$ heiße *$\mathscr{R}$-invariant* [*$\mathscr{R}_\lhd$-invariant*], wenn sie auf den $\mathscr{R}$-Äquivalenzklassen [$\mathscr{R}_\lhd$-Äquivalenzklassen] konstant ist; die Funktionen h_ϱ sind stets $\mathscr{R}_\lhd$-invariant, nicht notwendig aber $\mathscr{R}$-invariant. Gilt $(JHI_{\mathscr{R}})$ in $(E, \leqq)$ und ist f eine additive, $\mathscr{R}_\lhd$-invariante Intervallfunktion auf $(E, \leqq)$ über $\lhd\lhd$ mit Werten in einem Modul G, so gilt für alle a, b aus E mit $a \lhd\lhd b$ dann $f(a, b) = \sum_{\varrho \in \mathsf{P}} \lambda_\varrho \cdot h_\varrho(a, b)$, λ_ϱ der Wert von f auf der durch ϱ bestimmten Klasse von $\lhd$-Intervallen (gibt es in ϱ keine $\lhd$-Intervalle, so verschwindet h_ϱ identisch), und jede solche Linearkombination mit beliebigen λ_ϱ aus G bestimmt dann eine additive, $\mathscr{R}_\lhd$-invariante Intervallfunktion über $\lhd\lhd$. Erst recht läßt sich jedes $\mathscr{R}$-invariante, additive f so darstellen; sind außerdem die h_ϱ $\mathscr{R}$-invariant, so auch ihre Linearkombinationen. Gilt $(JHI_{\mathscr{R}})$ in $(E, \leqq)$ und ist G additive Gruppe eines Ringes H [und sind die h_ϱ $\mathscr{R}$-invariant], so bilden die additiven, $\mathscr{R}_\lhd$-invarianten [$\mathscr{R}$-invarianten] Intervallfunktionen auf $(E, \leqq)$ über $\lhd\lhd$ mit Werten in G einen Modul über H mit den nicht identisch verschwindenden h_ϱ als freien Erzeugenden.

Ist $\mathscr{T}$ eine gröbere Äquivalenzrelation als $\mathscr{R}$ ($\mathscr{R} \leqq \mathscr{T}$), so wird $(JHI_{\mathscr{T}})$, eine Folge von $(JHI_{\mathscr{R}})$; für jede $\mathscr{T}$-Restklasse τ und für alle a, b mit $a \lhd\lhd b$ findet man in diesem Falle $h_\tau(a, b) = \sum_{\varrho \leqq \tau} h_\varrho(a, b)$, und mit den h_ϱ werden dann auch die h_τ $\mathscr{R}$-invariant.

1.4. Wählt man für $\mathscr{R}$ die Allrelation $\mathscr{A}$ auf der Menge aller Intervalle von $(E, \leqq)$, gibt es also nur eine Restklasse α, so ist $h_\alpha(a, b, K)$ gerade die *Länge* von K: Elementeanzahl von K^*, um Eins verminderte Elementeanzahl von K; die zugehörige Intervallfunktion h_α wird mit d bezeichnet und heißt *Kořinecksche Intervallfunktion*: für a, b aus E mit $a \lhd\lhd b$ ist $d(a, b)$ das Minimum aller Längen von endlichen Ultraketten zwischen a, b (Kořinek [2], [3]); für a, b, c aus E mit $a \lhd\lhd c \lhd\lhd b$ gilt $d(a, b) \leqq d(a, c) + d(c, b)$, und das Gleichheitszeichen tritt genau dann ein, wenn c Element einer endlichen Ultrakette kürzester Länge zwischen a, b ist. Weiter heißt dann die Aussage $(JHI_{\mathscr{A}})$ *Jordan-Dedekindsche Kettenbedingung* (Dedekind [1], § 6, Th. XVI):

(*JD*) *für alle* a, b *aus* E: *alle endlichen Ultraketten zwischen* a, b *sind gleich lang*;

für jede Äquivalenzrelation $\mathscr{R}$ ist (*JD*) eine Folge von $(JHI_{\mathscr{R}})$; in diesem Falle hat man für alle a, b mit $a \lhd\lhd b$ die Darstellung $d(a, b) = \sum_{\varrho \in \mathsf{P}} h_\varrho(a, b)$, und mit den h_ϱ ist dann auch d $\mathscr{R}$-invariant.

Eine Intervallfunktion f auf $(E, \leqq)$ heiße *$\lhd$-treu*, wenn sie für alle $\lhd$-Intervalle definiert und $\mathscr{A}_\lhd$-invariant ist, sie also für alle $\lhd$-Intervalle den gleichen Wert $k(f)$, $k(f) = \lambda_\alpha$, annimmt; sie heiße *umkehrbar $\lhd$-treu*, wenn sie $\lhd$-treu ist und der Wert $k(f)$ *nur* für $\lhd$-Intervalle angenommen wird. Für die fortan in 1.4 betrachteten Intervallfunktionen f und (Punkt-)Funktionen g werde vorausgesetzt, daß ihr Wertebereich der Modul der ganzen

Zahlen sei und für $\lhd$-Intervalle $[a, b]$ stets $f(a, b)$ und $\varphi g(a, b)$ von Null verschieden seien; verzichtet man auf Proportionalitätsaussagen, so genügt es, wenn für $\lhd$-Intervalle $[a, b]$ stets $f(a, b)$ und $\varphi g(a, b)$ Elemente unendlicher Ordnung eines Moduls G sind.

Für eine additive, $\lhd$-treue Intervallfunktion f auf $(E, \leqq)$ ist $\leqq_f$ gröber als $\lhd\lhd$ und, wegen der soeben genannten Voraussetzungen, f über $\lhd\lhd$ auch umkehrbar $\lhd$-treu: Äquivalent zu (JD) ist, daß eine additive, $\lhd$-treue Intervallfunktion f auf $(E, \leqq)$ über $\lhd\lhd$ existiere; alle additiven, $\lhd$-treuen Intervallfunktionen auf $(E, \leqq)$ über $\lhd\lhd$ sind dann rational-proportional zueinander und ganze Vielfache von d. Denn dann liefert bei gegebenem f ein trivialer Induktionsschluß (nach $d(a, b)$) für alle a, b mit $a \lhd\lhd b$ auch $f(a, b) = k(f) \cdot d(a, b)$; mit f ist daher auch d additiv, und d *ist* umkehrbar $\lhd$-treu; diese Zerlegung von f ist dann wegen (JD) gerade die nach 1.3 vorhandene Darstellung von f durch h_α, $h_\alpha = d$.

Sei F die Vereinigung aller mehr als ein Element enthaltenden Zusammenhangsklassen der geordneten Menge $(E, \lhd\lhd)$: a aus E liege in F genau dann, wenn sich ein von a verschiedenes b in E mit $a \lhd\lhd b$ oder $b \lhd\lhd a$ findet; statt für (JD) die Existenz geeigneter Intervallfunktionen zu fordern, kann man auch das Vorhandensein erzeugender (Punkt-)Funktionen auf F verlangen: für (JD) ist hinreichend, daß es eine auf F definierte Funktion g gibt mit

(A_4) *es gibt ein $k(g)$ in G: für alle a, b aus E: aus $a \lhd b$ folgt* $g(b) - g(a) = k(g)$

(BIRKHOFF [2], p. 11). Ist die geordnete Menge $(F, \lhd\lhd)$ nach oben oder nach unten gerichtet, so ist dies für (JD) auch notwendig: die Funktionen $\psi_a d$ erfüllen dann (A_4) mit $k(\psi_a d) = 1$; zwei der Bedingung (A_4) genügende Funktionen g_1, g_2 mit $k(g_1) = k(g_2)$ unterscheiden sich in diesem Falle auf F nur um eine ganze Konstante, falls aber $k(g_1) \neq k(g_2)$, so unterscheidet sich dort g_1 um eine rationale Konstante von einer zu g_2 rational-proportionalen Funktion. Es gibt aber geordnete Mengen $(F, \lhd\lhd)$ mit (JD), welche weder nach oben noch nach unten gerichtet sind und auf denen keine Funktion g mit (A_4) existiert, $k(g)$ von unendlicher Ordnung in G: über $\{a, b, c, x, y\}$ setze man $a \leqq b \leqq c$, $a \leqq y$, $x \leqq y$, $x \leqq c$; (JD) gilt, aber für ein (A_4) erfüllendes g würde $k(g) = g(c) - g(x) = g(c) - (g(y) - k(g)) = g(c) - g(a) = 2k(g)$.

Ist a Element von E und besitzen die Längen der endlichen Ketten in $(E, \leqq)$ mit a als größtem Element ein endliches Maximum, so sei $e(a)$ diese Zahl; $e(a)$ heißt auch *Dimension* von a (BIRKHOFF [2], p. 11). $(E, \leqq)$ heiße *endlich-dimensioniert*, wenn $e(a)$ für jedes a aus E definiert ist; in diesem Falle ist $(E, \leqq)$ beschränkt längenendlich und absteigend längenendlich, und die Existenz eines kleinsten Elementes ist äquivalent zum Gerichtetsein nach unten; insbesondere besitzt jeder endlich-dimensionierte Verband ein kleinstes Element. Ist $(E, \leqq)$ endlich dimensioniert und nach unten gerichtet, so ist (JD) äquivalent dazu, daß e der Bedingung (A_4) genügt (BIRKHOFF [2], p. 11): mit 0 als kleinstem Element von E folgt aus (JD) $e = \psi_0 d$, $d = \varphi e$.

Ist $(E, \leqq)$ nach unten gerichtet, so ist es genau dann endlich-dimensioniert, wenn es absteigend längenendlich ist und für je zwei a, b aus E die Längen der endlichen Ketten zwischen a, b eine endliche (von a, b abhängige) obere Schranke besitzen; insbesondere sind sicherlich Verbände endlich-dimensioniert, wenn in ihnen (JD) gilt und sie beschränkt längenendlich und absteigend längenendlich sind. Ist $(E, \leqq)$ beschränkt längenendlich und gilt (JD), so ist für festes a aus E die Menge aller oberen Schranken von a, geordnet durch die Spur von $\leqq$, endlich-dimensioniert mit der Dimensionsfunktion $\psi_a d$. Ist $(E, \leqq)$ endlich-dimensioniert und der Wertevorrat der Funktion e beschränkt, so heiße $(E, \leqq)$ *endlich-dimensional*; $(E, \leqq)$ ist dann aufsteigend längenendlich; ist $(E, \leqq)$ nach oben gerichtet und endlich-dimensioniert, so ist es genau dann endlich-dimensional, wenn es aufsteigend längenendlich ist; speziell sind längenendliche Verbände endlich-dimensional, wenn in ihnen (JD) gilt.

1.5. Als Verschärfung von (JD) betrachte man (Ore [1], Th. 3)

(*ORE*) *für alle a, b aus E: existiert eine endliche Ultrakette zwischen a, b, so sind alle Ultraketten zwischen a, b endlich und gleich lang.*

Äquivalent zu (ORE) ist die Konjunktion von (JD) mit den Konvexitätsforderung

(*KON*) *für alle a, b, c aus E: aus $a \lhd\lhd b$ und $a \leqq c \leqq b$ folgt $a \lhd\lhd c \lhd\lhd b$.*

Dabei ist die Notwendigkeit von (*KON*) für (*ORE*) offenbar (Auswahlaxiom!); umgekehrt folgt (*ORE*) aus (JD) und (*KON*) durch Induktion über d: falls $a \lhd\lhd b$, $1 < d(a, b)$ und K eine Ultrakette zwischen a, b ist, so wähle man ein von a, b verschiedenes c in K; wegen $a \lhd\lhd c \lhd\lhd b$ und $d(a, c) \neq 0$, $d(c, b) \neq 0$ folgt aus der Additivität von d dann $d(a, c) < d(a, b)$, $d(c, b) < d(a, b)$, so daß nach Induktionsannahme die Ketten $K \cap [a, c]$, $K \cap [c, b]$ endlich sind, also auch K endlich ist. — Additivität von d vorausgesetzt, liefert das Schema dieses Induktionsschlusses auch einen direkten Beweis dafür, daß für eine additive Kettenfunktion h auf $(E, \leqq)$ über $\lhd\lhd$ aus der Additivität einer Funktion ϑh auch die Aussage (A_3) (in der Gestalt $\vartheta h(a, b) = h(a, b, K)$ für alle K) folgt — insbesondere also (JD) selbst.

Eine diskret geordnete Menge mit (JD) ist beschränkt längenendlich. Allgemein ist eine diskret geordnete Menge nicht einmal ein Multiverband.

Sei $(E, \leqq)$ beschränkt absteigend längenendlich, so daß für alle a, b aus E die Ultraketten zwischen a, b wohlgeordnet sind; wenn $a \leqq b$, so sei $j_1(a, b)$ die kleinste Ordinalzahl α so, daß es eine Ultrakette zwischen a, b vom Typ α gibt. Für die Aussage, daß für alle a, b sämtliche Ultraketten zwischen a, b gleichen Typus haben, ist die Gültigkeit von (A_1) für j_1 zwar notwendig, aber nicht mehr hinreichend. Eine hinreichende Bedingung erhält man, wenn man neben (A_1) noch die Stetigkeit von j_1 verlangt: für jede durch $\leqq$ wohlgeordnete Folge (a_λ) aus E, $1 \leqq \lambda \leqq \lambda_0$, λ_0 Limeszahl, soll $j_1(a_1, a_{\lambda_0})$ Supremum der Zahlen $j_1(a_1, a_\lambda)$ mit $\lambda < \lambda_0$ sein. Denn dann findet man den Typus einer beliebigen Ultrakette zwischen a, b durch Aufsummieren als ebenfalls $j_1(a, b)$. —

Sinngemäß kann man auch bei beliebigem $(E, \leqq)$ eine Funktion j_2 definieren, deren Werte Kardinalzahlen sind; ist einer der in (A_1) zu addierenden Werte unendlich, so gilt diese Formel als Folge des Auswahlaxioms schon immer; die entsprechende Stetigkeitsbedingung lautet: für alle a, b und alle Ultraketten K zwischen a, b: $j_2(a, b)$ ist Supremum der Zahlen $j_2(a, x)$ mit x in K, $x \neq b$.

2. Reduktionstheorie der Jordan-Hölder-Sätze. 2.0. Sei $(E, \leqq)$ eine geordnete Menge; unter dem auf Ketten sich beziehenden Jordan-Hölder-Satz für eine binäre, reflexive, symmetrische Relation $\mathscr{R}$ zwischen Ketten in $(E, \leqq)$ wird man die folgende Aussage verstehen:

$(JHK_{\mathscr{R}})$ *für alle a, b aus E: für alle endlichen Ultraketten K, L zwischen a, b: K, L stehen in der Relation $\mathscr{R}$.*

Jede binäre, reflexive, symmetrische Relation [jede Äquivalenzrelation] $\mathscr{R}$ zwischen Intervallen von $(E, \leqq)$ gibt in natürlicher Weise Anlaß zu einer binären, reflexiven, symmetrischen Relation [Äquivalenzrelation] $\varkappa\mathscr{R}$ zwischen Ketten in $(E, \leqq)$: K, L stehen in der Relation $\varkappa\mathscr{R}$ genau dann, wenn eine umkehrbare Abbildung von K^* auf L^* so existiert, daß zugeordnete Intervalle in der Relation $\mathscr{R}$ stehen; jeder Satz $(JHI_{\mathscr{R}})$ (im Sinne von 1.3) ist dem entsprechenden Satz $(JHK_{\varkappa\mathscr{R}})$ gleichwertig.

Gesucht wird nun ein Reduktionsverfahren für Sätze $(JHK_{\mathscr{R}})$, welches auf die Gültigkeit ihrer Behauptung für alle K, L zu schließen erlaubt, wenn nur die Richtigkeit derselben für in besonders günstiger Lage sich befindende K, L erst gesichert ist. Zugleich mit diesem Verfahren wird sich eine Reduktion für den Schluß ergeben, mit dem aus dem Vorhandensein einer endlichen Ultrakette zwischen a, b die Endlichkeit aller Ultraketten einer gewissen Klasse $\mathfrak{B}$ zwischen a, b gefolgert wird (das Wort Klasse wird in dieser Arbeit als synonym mit Menge verwendet).

2.1. Sei $(E, \leqq)$ eine geordnete Menge, $\mathfrak{F}$ die Menge aller endlichen Ultraketten in $(E, \leqq)$, seien $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ Mengen von Ultraketten in $(E, \leqq)$ mit $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{B}_i$ $(i = 1, 2)$. Sei $\mathscr{X}$ eine binäre Relation zwischen Ultraketten; man definiere $\mathscr{X} \cap (\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2)$ durch $K \mathscr{X} \cap (\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2) L$ für Ultraketten K, L in $(E, \leqq)$, genau wenn $K \mathscr{X} L$, K in $\mathfrak{B}_1$, L in $\mathfrak{B}_2$. Man definiere eine binäre, symmetrische Relation $\mathscr{D}$ zwischen Ultraketten durch $K \mathscr{D} L$ für Ultraketten K, L in $(E, \leqq)$, genau wenn a, b in E existieren, für die K, L Ultraketten zwischen a, b sind.

Sei $\mathscr{L}$ eine binäre, symmetrische Relation zwischen Ultraketten in $(E, \leqq)$ — eben die Relation, in günstiger Lage zu sein — und es gelte $\mathscr{L} \subseteq \mathscr{D}$; $(JHK_{\mathscr{R}})$ ist gesichert, wenn $\mathscr{R}$ sowohl aus $\mathscr{L}$ wie aus $non\,\mathscr{L}$ folgt: $\mathscr{L} \subseteq \mathscr{R}$ und $non\,\mathscr{L} \subseteq \mathscr{R}$; dabei wird der Nachweis von $\mathscr{L} \subseteq \mathscr{R}$ als Problem speziell gegebener $\mathscr{L}, \mathscr{R}$ betrachtet und an dieser Stelle nicht weiter untersucht. Sei $\mathfrak{B}$ eine Menge von Ultraketten in $(E, \leqq)$ mit $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{B}$; für $(JHK_{\mathscr{R}})$ genügt es gewiß, statt $non\,\mathscr{L} \subseteq \mathscr{R}$ nur $non\,\mathscr{L} \cap (\mathfrak{F} \times \mathfrak{B}) \subseteq \mathscr{R} \cup non\,\mathscr{D}$ nachzuweisen, $\mathscr{R} \cup non\,\mathscr{D}$ die Vereinigungsmenge (sog. logische Disjunktion) von $\mathscr{R}$ und $non\,\mathscr{D}$. Dieser Schluß

wird weiter zerlegt: es wird eine Hilfsrelation $\mathscr{H}$ eingeführt, und es werden nur noch solche Relationen $\mathscr{L}$ betrachtet, für die $non\,\mathscr{L} \cap (\mathfrak{F} \times \mathfrak{B}) \subseteq \mathscr{H} \cup non\,\mathscr{D}$ gilt; hinreichend für $(JHK_{\mathscr{R}})$ ist dann $\mathscr{H} \subseteq \mathscr{R}$. Im Allgemeinen wird der Nachweis von $\mathscr{H} \subseteq \mathscr{R}$ immer noch kaum einfacher sein als ein direkter Beweis von $(JHK_{\mathscr{R}})$; im Folgenden wird es jedoch gelingen, für explizite anzugebende Relationen $\mathscr{H}$ und für alle Relationen $\mathscr{R}$ einer leicht überschaubaren Klasse den Schluß $\mathscr{H} \subseteq \mathscr{R}$ zu beweisen, Gültigkeit von $\mathscr{L} \subseteq \mathscr{R}$ und $non\,\mathscr{L} \cap (\mathfrak{F} \times \mathfrak{B}) \subseteq \mathscr{H} \cup non\,\mathscr{D}$ dabei vorausgesetzt.

Sei $\mathfrak{B}$ eine Menge von Ultraketten in $(E, \leqq)$ mit $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{B}$; zwei Ultraketten K, L in $(E, \leqq)$ sollen in der Relation $\mathscr{M}_{\mathfrak{B}}$ stehen, wenn a, b, c in $K \cap L$ mit $a \leqq c \leqq b$, $c \neq a$, $c \neq b$ existieren, K, L Ultraketten zwischen a, b sind und $K \cap [a, c] = L \cap [a, c]$, $K \cap [c, b] \in \mathfrak{B}$, $L \cap [c, b] \in \mathfrak{B}$ gilt oder $K \cap [c, b] = L \cap [c, b]$, $K \cap [a, c] \in \mathfrak{B}$, $L \cap [a, c] \in \mathfrak{B}$ gilt; weiter sei $\mathscr{N}_{\mathfrak{B}}$ die von $\mathscr{M}_{\mathfrak{B}}$ erzeugte Äquivalenzrelation. Ist $(E, \leqq)$ diskret geordnet, so gilt $\mathscr{N}_{\mathfrak{B}} = \mathscr{N}_{\mathfrak{F}}$.

Jede binäre, symmetrische Relation $\mathscr{R}$ zwischen Ultraketten in $(E, \leqq)$ definiert eine binäre, symmetrische Relation $\lambda\mathscr{R}$ zwischen Ultraketten in $(E, \leqq)$: für K, L gelte $K \lambda\mathscr{R} L$, wenn es Ultraketten M, N gibt mit $M \subseteq K$, $N \subseteq L$, $K - M = L - N$ und $M \mathscr{R} N$; die Abbildung von $\mathscr{R}$ auf $\lambda\mathscr{R}$ ist ein Hüllenoperator, und $\mathscr{R}$ heiße *λ-invariant*, wenn $\mathscr{R} = \lambda\mathscr{R}$. Insbesondere ist jede aus einer Relation $\mathscr{R}$ zwischen Intervallen von $(E, \leqq)$ entstehende Relation $\varkappa\mathscr{R}$ auch λ-invariant.

Sei $\mathfrak{B}$ eine Menge von Ultraketten in $(E, \leqq)$ mit $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{B}$; sei $\mathscr{L}$ eine binäre, symmetrische Relation auf $\mathfrak{B}$ mit $\mathscr{L} \subseteq \mathscr{D}$ und $non\,\mathscr{L} \cap (\mathfrak{F} \times \mathfrak{B}) \subseteq \mathscr{N}_{\mathfrak{B}} \cup non\,\mathscr{D}$; sei $\mathscr{R}$ eine λ-invariante Äquivalenzrelation auf $\mathfrak{B}$. *Dann ist*

$(JHK_{\mathscr{R}, \mathfrak{B}})$ *für alle a, b aus E: für alle Ultraketten K, L zwischen a, b: wenn $a \lhd\lhd b$ und K, L in $\mathfrak{B}$, so K, L in $\mathfrak{F}$, K, L gleich lang, $K \mathscr{R} L$*

äquivalent zu

$(JHK_{\mathscr{L}, \mathscr{R}, \mathfrak{B}})$ *für alle a, b aus E: für alle Ultraketten K, L zwischen a, b: wenn $K \mathscr{L} \cap (\mathfrak{F} \times \mathfrak{B}) L$, so L in $\mathfrak{F}$, K, L gleich lang, $K \mathscr{R} L$.*

Dabei ist $(JHK_{\mathscr{R}, \mathfrak{B}})$ äquivalent zur Konjunktion von $(JHK_{\mathscr{R}, \mathfrak{F}})$ mit

$(FIN_{\mathfrak{B}})$ *für alle a, b aus E: wenn $a \lhd\lhd b$, so sind alle in $\mathfrak{B}$ gelegenen Ultraketten zwischen a, b endlich.*

Der Beweis, daß $(JHK_{\mathscr{L}, \mathscr{R}, \mathfrak{B}})$ für $(JHK_{\mathscr{R}, \mathfrak{B}})$ hinreichend ist, geschieht durch Induktion über $d(a, b)$. Für $d(a, b) = 1$ ist nichts zu zeigen; weiter kann man wegen der Transitivität von $\mathscr{R}$ und der Transitivität des Endlich- und Gleichlang-Seins annehmen, daß etwa die in $(JHK_{\mathscr{R}, \mathfrak{B}})$ auftretende Kette K eine endliche Ultrakette der Länge $d(a, b)$ sei. Falls $d(a, b) = 2$, gibt es dann (Definition von $\mathscr{N}_{\mathfrak{B}}$!) kein von K verschiedenes L mit $K \mathscr{N}_{\mathfrak{B}} L$, so daß aus $K \neq L$ wegen $non\,\mathscr{L} \cap (\mathfrak{F} \times \mathfrak{B}) \subseteq \mathscr{N}_{\mathfrak{B}} \cup non\,\mathscr{D}$ daher $K \mathscr{L} L$, aus $(JHK_{\mathscr{L}, \mathscr{R}, \mathfrak{B}})$ das Gewünschte folgt. Sei die Behauptung von $(JHK_{\mathscr{R}, \mathfrak{B}})$ mit x, y statt a, b mit alle x, y mit $2 \leqq d(x, y) < n$ bewiesen und sei $d(a, b) = n$; wegen $(JHK_{\mathscr{L}, \mathscr{R}, \mathfrak{B}})$

ist nur noch der Fall $K\mathcal{N}_{\mathfrak{B}}L$ zu betrachten, und wegen der Transitivität von $\mathcal{R}$ kann man sich auf $K\mathcal{M}_{\mathfrak{B}}L$ beschränken. Dann gibt es c in K mit $c\neq a$, $c\neq b$ und etwa $K\cap[a,c]=L\cap[a,c]$, $L\cap[c,b]\in\mathfrak{B}$. Da K Ultrakette kürzester Länge zwischen a,b ist, gilt $d(a,b)=d(a,c)+d(c,b)$, wegen $a\neq c$ also $d(c,b)<n$, so daß $K\cap[c,b]$ und $L\cap[c,b]$ in der Relation $\mathcal{R}$ stehen, endlich und gleich lang sind. Wegen der λ-Invarianz von $\mathcal{R}$ und der Endlichkeit von $K\cap[a,c]$ gilt dann das Gleiche für K,L.

Insbesondere ist die von $\lambda\mathcal{L}$ erzeugte Äquivalenzrelation $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ λ-invariant; *aus* $(JHK_{\mathcal{R},\mathfrak{B}})$ *folgt stets* $(JHK_{\mathcal{E}_{\mathcal{L}},\mathfrak{B}})$, *aus* $(JHK_{\mathcal{R},\mathfrak{B}})$ *folgt weiter stets* (JD). Wegen der Transitivität von $\mathcal{N}_{\mathfrak{B}}$ läßt sich in $(JHK_{\mathcal{L},\mathcal{R},\mathfrak{B}})$ die Voraussetzung und in $(JHK_{\mathcal{E}_{\mathcal{L}},\mathfrak{B}})$ die Behauptung verschärfen: für Ultraketten K,L in $(E,\leqq)$ gelte $K\gamma_{\mathfrak{B}}\mathcal{L}L$, wenn $K\mathcal{L}L$ und $K\,non\,\mathcal{N}_{\mathfrak{B}}L$, und $\beta\mathcal{L}$ sei eine Relation mit $\gamma_{\mathfrak{B}}\mathcal{L}\leqq\beta\mathcal{L}\leqq\mathcal{L}$; in der Voraussetzung von $(JHK_{\mathcal{L},\mathcal{R},\mathfrak{B}})$ kann man $K\mathcal{L}\cap(\mathfrak{F}\times\mathfrak{B})L$ durch $K\beta\mathcal{L}\cap(\mathfrak{F}\times\mathfrak{B})L$ ersetzen, und $(JHK_{\mathcal{E}_{\mathcal{L}},\mathfrak{B}})$ ist äquivalent zu $(JHK_{\mathcal{E}_{\beta\mathcal{L}},\mathfrak{B}})$. Eine weitere Abschwächung von $(JHK_{\mathcal{L},\mathcal{R},\mathfrak{B}})$ erhält man schließlich durch Verminderung des Behaupteten:

(A_5) *für alle* a,b *aus* E: *für alle Ultraketten* K,L *zwischen* a,b: *wenn* $K\mathcal{L}\cap(\mathfrak{F}\times\mathfrak{B})L$, *so existieren Ultraketten* M,N *zwischen* a,b *mit* $M\mathcal{N}_{\mathfrak{B}}K$, $N\mathcal{N}_{\mathfrak{B}}L$, $M\mathcal{R}\cap(\mathfrak{B}\times\mathfrak{F})N$, K,N *gleich lang.*

Für aus Intervall-Äquivalenzrelationen $\mathcal{R}$ gebildete $\varkappa\mathcal{R}$ behauptet $(JHK_{\varkappa\mathcal{R}})$ dasselbe wie $(JHK_{\varkappa\mathcal{R},\mathfrak{F}})$.

Für jede symmetrische Relation $\mathcal{L}$ *mit* $\mathcal{L}\leqq\mathcal{D}$, $non\,\mathcal{L}\cap(\mathfrak{F}\times\mathfrak{F})\leqq\mathcal{N}_{\mathfrak{B}}\cup non\,\mathcal{D}$ *ist* $(JHK_{\mathcal{E}_{\mathcal{L}},\mathfrak{B}})$ *äquivalent zu der Konjunktion von* (JD) *und* $(FIN_{\mathfrak{B}})$, *insbesondere also* $(JHK_{\mathcal{E}_{\mathcal{L}},\mathfrak{F}})$ *äquivalent zu* (JD); die strukturell wenig durchsichtige Aussage, daß in einer geordneten Menge $(JHK_{\mathcal{E}_{\mathcal{L}},\mathfrak{B}})$ gelte, läßt sich derart in eine solche von sehr einfacher Gestalt übersetzen. Aus $(FIN_{\mathfrak{B}})$ folgt dann nämlich $non\,\mathcal{L}\cap(\mathfrak{F}\times\mathfrak{B})\leqq\big(non\,\mathcal{L}\cap(\mathfrak{F}\times\mathfrak{F})\big)\cup non\,\mathcal{D}\leqq\mathcal{N}_{\mathfrak{B}}\cup non\,\mathcal{D}$, aus $(FIN_{\mathfrak{B}})$ und (JD) folgt $(JHK_{\mathcal{L},\mathcal{E}_{\mathcal{L}},\mathfrak{B}})$. Ist also $\mathcal{S}$ eine weitere Relation mit $\mathcal{S}\leqq\mathcal{D}$, $non\,\mathcal{S}\cap(\mathfrak{F}\times\mathfrak{F})\leqq\mathcal{N}_{\mathfrak{B}}\cup non\,\mathcal{D}$, so sind $(JHK_{\mathcal{E}_{\mathcal{L}},\mathfrak{B}})$ und $(JHK_{\mathcal{E}_{\mathcal{S}},\mathfrak{B}})$ äquivalent; im Hinblick auf Sätze $(JHK_{\mathcal{R},\mathfrak{B}})$ ist keine der günstigen Lagen $\mathcal{L}$ vor den anderen ausgezeichnet.

2.2. Sei $\mathfrak{A}$ die Menge aller Ultraketten in $(E,\leqq)$; im Falle $\mathcal{L}\leqq\mathcal{D}$, $non\,\mathcal{L}\leqq\mathcal{N}_{\mathfrak{A}}\cup non\,\mathcal{D}$ gilt $non\,\gamma_{\mathfrak{A}}\mathcal{L}=\mathcal{N}_{\mathfrak{A}}\cup non\,\mathcal{D}$; wenn noch $\mathcal{M}_{\mathfrak{A}}\leqq non\,\mathcal{L}$ gilt und $\mathcal{L}$ nicht reflexiv ist, so läßt sich dann $\gamma_{\mathfrak{A}}\mathcal{L}$ wie folgt konstruieren. Ein Paar (K_1,K_2) von Ketten K_i $(i=1,2)$ zwischen a,b aus E heiße *Viereck* (in $(E,\leqq)$), wenn jedes der K_i genau drei Elemente enthält; weiter sei $\mathfrak{K}_i$ die Menge aller Ultraketten in $(E,\leqq)$, welche Verfeinerungen von K_i sind; die Elemente von $\mathfrak{K}_i$ heißen *Seiten* des Viereckes (K_1,K_2). Man setze $\beta_0\mathcal{L}=\mathcal{L}$ und nenne für alle natürlichen n $(n=1,2,\ldots)$ ein Viereck (K_1,K_2) ein $\beta_n\mathcal{L}$-Viereck, wenn aus $L_i\in\mathfrak{K}_i$ folgt $L_1\beta_{n-1}\mathcal{L}L_2$; damit erkläre man die Relationen $\beta_n\mathcal{L}$ zwischen Ultraketten L_1,L_2 in $(E,\leqq)$ durch $L_1\beta_n\mathcal{L}L_2$, genau wenn jedes Viereck (K_1,K_2) mit $L_i\in\mathfrak{K}_i$ ein $\beta_n\mathcal{L}$-Viereck ist und es mindestens

ein solches Viereck gibt. *Es wird behauptet, daß $\gamma_{\mathfrak{A}}\mathscr{L}$ gleich dem Durchschnitt (der Konjunktion) der $\beta_n\mathscr{L}$ sei* $(n=0, 1, \ldots)$. [1])

In der Tat: per definitionem gilt $\beta_n\mathscr{L}\subseteqq\beta_{n-1}\mathscr{L}$ $(n=1, 2, \ldots)$; weiter hat man $\gamma_{\mathfrak{A}}\mathscr{L}\subseteqq\beta_n\mathscr{L}$ $(n=0, 1, \ldots)$. Denn dies ist für $n=0$ nach Konstruktion der Fall; sei es für $n-1$, $n-1\geqq 0$, bewiesen und seien L_1, L_2 Ultraketten zwischen a, b mit $L_1\ non\ \beta_n\mathscr{L}\,L_2$; hat eine der beiden Ketten die Länge Eins, so gilt $L_1=L_2$, $L_1\mathcal{N}_{\mathfrak{A}}L_2$, $L_1 non\ \gamma_{\mathfrak{A}}\mathscr{L}\,L_2$. Andernfalls gibt es ein Viereck, dessen Seiten L_1, L_2 sind, also auch wenigstens ein solches Viereck (K_1, K_2), das kein $\beta_n\mathscr{L}$-Viereck ist. Folglich gibt es M_i in $\mathfrak{K}_i$ mit $M_1 non\ \beta_{n-1}\mathscr{L}\,M_2$, $M_1 non\gamma_{\mathfrak{A}}\mathscr{L}\,M_2, M_1\mathcal{N}_{\mathfrak{A}}M_2$; wenn aber $K_i=\{a, x_i, b\}$, so wegen $x_i\neq a$, $x_i\neq b$ auch $L_i\,\mathcal{M}_{\mathfrak{A}}(L_i\cap[a, x_i])\cup(M_i\cap[x_i, b])\,\mathcal{M}_{\mathfrak{A}}M_i$, $L_i\mathcal{N}_{\mathfrak{A}}M_i$, $L_1\mathcal{N}_{\mathfrak{A}}L_2, L_1 non\ \gamma_{\mathfrak{A}}\mathscr{L}\,L_2$. — Daher gilt für den Durchschnitt $\bigcap\beta_n\mathscr{L}$ der $\beta_n\mathscr{L}$ auch $\gamma_{\mathfrak{A}}\mathscr{L}\subseteqq\bigcap\beta_n\mathscr{L}$; bleibt zu zeigen, daß auch $non\,\gamma_{\mathfrak{A}}\mathscr{L}\subseteqq non\bigcap\beta_n\mathscr{L}$ erfüllt ist. Sind L_1, L_2 Ultraketten mit $L_1 non\,\gamma_{\mathfrak{A}}\mathscr{L}\,L_2$, L_1, L_2 Ultraketten zwischen a, b, also $L_1\mathcal{N}_{\mathfrak{A}}L_2$, so existieren Ultraketten M_i $(i=0, \ldots, k)$ mit $M_0=L_1$, $M_k=L_2$ und, falls $k>0$, $M_j\,\mathcal{M}_{\mathfrak{A}}M_{j-1}$ $(j=1, \ldots, k)$; aus $k\leqq 1$ folgt daher $L_1 non\,\mathscr{L}\,L_2$, $L_1 non\beta_0\mathscr{L}\,L_2$, $L_1 non\bigcap\beta_n\mathscr{L}\,L_2$; sei bereits für alle k mit $0<k<h$ gezeigt, daß aus den gemachten Voraussetzungen $L_1 non\beta_{k-1}\mathscr{L}\,L_2$ folgt, und seien jetzt die Voraussetzungen für L_1, L_2 mit $k=h$ erfüllt. Wegen $M_{h-1}\,\mathcal{M}_{\mathfrak{A}}L_2$ gibt es dann von a, b verschiedene x_1, x_2 mit $x_1\in L_1$, $x_2\in M_{h-1}\cap L_2$, und wegen $L_1 non\ \beta_{h-2}\mathscr{L}\,M_{h-1}$ ist (K_1, K_2) mit $K_i=\{a, x_i, b\}$ kein $\beta_{h-1}\mathscr{L}$-Viereck, so daß wegen $x_2\in L_2$ auch $L_1 non\,\beta_{h-1}\mathscr{L}\,L_2$ gilt.

2.3. Sei $(E, \leqq)$ geordnet, $\mathscr{L}$ eine binäre, symmetrische Relation auf $\mathfrak{A}$ mit $non\,\mathscr{L}\subseteqq\mathcal{N}_{\mathfrak{A}}\cup non\,\mathscr{D}$; sei $\mathscr{E}_{\mathscr{L}}$ die von $\lambda\mathscr{L}$ erzeugte Äquivalenzrelation. Sind K, L Ultraketten zwischen a, b aus E mit $K non\,\mathscr{E}_{\mathscr{L}}L$, so gibt es x, y mit $a\leqq x\leqq y\leqq b$, $a\neq x$ oder $b\neq y$, und Ultraketten M, N zwischen x, y mit $M non\,\mathscr{E}_{\mathscr{L}}L$. Denn da dann erst recht $K non\,\mathscr{L}\,L$, also $K\mathcal{N}_{\mathfrak{A}}L$, gibt es endlich viele Ultraketten K_i $(i=0, \ldots, n, 0<n)$ zwischen a, b mit $K_0=K$, $K_n=L$, $K_{j-1}\,\mathcal{M}_{\mathfrak{A}}K_j$ $(j=1, \ldots, n)$; wegen der Transitivität von $\mathscr{E}_{\mathscr{L}}$ muß für mindestens ein j gelten $K_{j-1} non\,\mathscr{E}_{\mathscr{L}}K_j$. Aus $K_{j-1}\,\mathcal{M}_{\mathfrak{A}}K_j$ folgt aber die Existenz von c in $K_{j-1}\cap K_j$ mit $c\neq a$, $c\neq b$ und etwa $K_{j-1}\cap[a, c]=K_j\cap[a, c]$; wegen der λ-Invarianz von $\mathscr{E}_{\mathscr{L}}$ muß also $K_{j-1}\cap[c, b]\,non\,\mathscr{E}_{\mathscr{L}}\,K_j\cap[c, b]$ gelten, so daß man $x=c$, $y=b$, $M=K_{j-1}\cap[c, b]$, $N=K_j\cap[c, b]$ setzen kann.

Sei $(E, \leqq)$ beschränkt längenendlich; dann gilt für jedes $\mathscr{L}$ mit $non\,\mathscr{L}\subseteqq\mathcal{N}_{\mathfrak{A}}\cup non\,\mathscr{D}$

$(ML_{\mathscr{L}})$ für alle a, b aus E: für alle Ultraketten K, L zwischen a, b: $K\,\mathscr{E}_{\mathscr{L}}L$.

Denn aus dem Vorhandensein zweier Ultraketten K, L zwischen a, b mit $K non\,\mathscr{E}_{\mathscr{L}}L$ ließe sich dann sofort (Auswahlaxiom!) die Existenz einer unendlichen Kette zwischen a, b folgern.

2.4. Sei $(E, \leqq)$ eine geordnete Menge; es sollen Beispiele für Relationen $\mathscr{L}$ angegeben werden. — Ein Paar (K_1, K_2) von Ketten K_i zwischen a, b

[1]) Im Falle $non\,\mathscr{L}\cap(\mathfrak{F}\times\mathfrak{B})\subseteqq\mathcal{N}_{\mathfrak{B}}\cup non\,\mathscr{D}$ gilt $non\,\gamma_{\mathfrak{B}}\mathscr{L}\cap(\mathfrak{F}\times\mathfrak{B})=(\mathcal{N}_{\mathfrak{B}}\cup non\mathscr{D})\cap(\mathfrak{F}\times\mathfrak{B})$; unter weiteren Voraussetzungen über $\mathfrak{B}$ (die etwa von $\mathfrak{F}$ oder der Klasse aller wohlgeordneten Ultraketten in $(E, \leqq)$ erfüllt würden) ließen sich dann die Definitionen der $\beta_n\mathscr{L}$ so abändern, daß $\gamma_{\mathfrak{B}}\mathscr{L}\cap(\mathfrak{F}\times\mathfrak{B})$ ähnlich konstruiert werden könnte.

aus E heiße *Zelle* (in $(E, \leqq)$, zwischen a, b), wenn jede der Ketten mindestens drei Elemente enthält und wenn für jedes Paar k_1, k_2 dann a eine maximale untere, b eine minimale obere Schranke in $(E, \leqq)$ von $\{k_1, k_2\}$ ist, $k_i \in K_i$, $k_i \neq a$, $k_i \neq b$ $(i = 1, 2)$; die K_i heißen dann Komponenten der Zelle (K_1, K_2), sie haben nur die Elemente a, b gemeinsam; vereinigt man die Komponenten einer Zelle, so ist die entstehende Teilmenge von E, geordnet durch die Spur von $\leqq$, ein Verband, der, falls $(E, \leqq)$ Verband ist, Teilverband von $(E, \leqq)$ ist. Eine Zelle, deren Komponenten Ultraketten in $(E, \leqq)$ sind, heiße *einfach*; ein Viereck, welches einfache Zelle ist, heiße *einfaches Viereck*[2]).

Sei $\mathscr{Z}$ die Relation, Komponente der gleichen einfachen Zelle in $(E, \leqq)$ zu sein; *dann gilt non* $\mathscr{Z} \leqq \mathscr{N}_{\mathfrak{A}} \cup$ *non* $\mathscr{Q}$. Denn sind K, L Ultraketten zwischen a, b mit K *non* $\mathscr{Z} L$, so gibt es x in K, y in L, z in E mit etwa $x \leqq z \leqq b$, $y \leqq z$, $x \neq a$, $y \neq a$, $z \neq b$; verfeinert man (Auswahlaxiom!) $\{x, z, b\}$ und $\{y, z\}$ zu Ultraketten X, Y in $(E, \leqq)$, so gilt $K \mathscr{M}_{\mathfrak{A}} (K \cap [a, x]) \cup X \mathscr{M}_{\mathfrak{A}} (L \cap [a, y]) \cup Y \cup (X \cap [z, b]) \mathscr{M}_{\mathfrak{A}} L$, also $K \mathscr{N}_{\mathfrak{A}} L$.

Man erkläre $\beta_{\frac{1}{2}} \mathscr{Z}$ für Ultraketten K, L in $(E, \leqq)$ durch $K \beta_{\frac{1}{2}} \mathscr{Z} L$, genau wenn ein $\beta_1 \mathscr{Z}$-Viereck (K_1, K_2) mit $K \in \mathfrak{K}_1$, $L \in \mathfrak{K}_2$ existiert; dann gilt $\gamma_{\mathfrak{A}} \mathscr{Z} = \bigcap \beta_n \mathscr{Z} \leqq \beta_1 \mathscr{Z} \leqq \beta_{\frac{1}{2}} \mathscr{Z} \leqq \mathscr{Z}$. *Damit lassen sich die in* 2.1 *bis* 2.3 *bewiesenen Sätze bei Ersetzung von* $\mathfrak{B}$ *durch* $\mathfrak{A}$ *und von* $\mathscr{L}$ *durch* $\mathscr{Z}$, $\beta_n \mathscr{Z}$, $\gamma_{\mathfrak{A}} \mathscr{Z}$ *aussprechen* $(n = \frac{1}{2}, 1, 2, \ldots)$; *zum Beispiel wird wegen* (A_5) *dann* $(JHK_{\mathscr{E}_{\mathscr{Z}}, \mathfrak{A}})$ *äquivalent zu* $(JHK_{\mathscr{E}_{\beta_{\frac{1}{2}} \mathscr{Z}}, \mathfrak{A}})$ *und zu*

$(A_6(n))$ *für alle* a, b *aus* E: *für alle* $\beta_n \mathscr{Z}$-*Vierecke* (K_1, K_2) *zwischen* a, b: *wenn* K *in* $\mathfrak{K}_1$ *und* K *endlich, so existiert* L *in* $\mathfrak{K}_2$, L *endlich,* K, L *gleich lang*

für jedes n $(n = 1, 2, \ldots)$[3]).

[2]) Allgemein kann man für Mengen $\mathfrak{B}$ von Ultraketten in $(E, \leqq)$ eine $\mathfrak{B}$-Zelle definieren als ein Paar (K_1, K_2) von Ketten K_i zwischen a, b aus E $(i = 1, 2)$, deren jede mindestens drei Elemente enthält, wobei für jedes Paar $\{k_1, k_2\}$ mit $k_i \in K_i$, $k_i \neq a$, $k_i \neq b$ gilt: es gibt kein u in E mit $u \neq a$ so, daß Ketten aus $\mathfrak{B}$ zwischen a, u und u, k_i existieren, und es gibt kein v in E mit $v \neq b$ so, daß Ketten aus $\mathfrak{B}$ zwischen v, b und k_i, v existieren. Dann wären die $\mathfrak{A}$-Zellen gerade die oben definierten, unter den $\mathfrak{F}$-Zellen mit endlichen Komponenten fänden sich die Zellen der geordneten Menge $(E, \lhd\lhd)$. Für die hier beabsichtigten Anwendungen zeigt es sich, daß man mit den $\mathfrak{A}$-Zellen und den auch durch Relativierung zu erhaltenden $\mathfrak{F}$-Zellen auskommt. — Der Begriff der Zelle wurde von ORE [1] eingeführt; es treten dort nur einfache Zellen auf, die *simple cycles* heißen; der Begriff des $\beta_1 \mathscr{Z}$-Vierecks wurde von BENADO [4] erfunden, und ein $\beta_1 \mathscr{Z}$-Viereck heißt dort *einfaches Viereck*; eine Zelle, die Viereck ist, heißt bei BENADO [3], [4] *irreduzibles Viereck*. Die Relation $\beta_1 \mathscr{Z}$ findet sich bei KOLIBIAR [1]; ein Paar von in der Relation $\beta_1 \mathscr{Z}$ stehenden Ultraketten heißt dort *irreduzibler Zyklus*.

[3]) Die Äquivalenz von $(JHK_{\mathscr{E}_{\mathscr{Z}}, \mathfrak{A}})$ und $(JHK_{\mathscr{Z}, \mathscr{E}_{\mathscr{Z}}, \mathfrak{A}})$ steht bei ORE [1], Th. 3, für den Spezialfall beschränkt längenendlicher $(E, \leqq)$ auch Th. 2; für beschränkt längenendliche $(E, \leqq)$ wurde die Äquivalenz von $(JHK_{\mathscr{E}_{\beta_{\frac{1}{2}} \mathscr{Z}}, \mathfrak{F}})$ und $(JHK_{\beta_{\frac{1}{2}} \mathscr{Z}, \mathscr{E}_{\beta_{\frac{1}{2}} \mathscr{Z}}, \mathfrak{F}})$, diese Aussage in einer $(A_{6(1)})$ ähnlichen Gestalt geschrieben, von BENADO [4] bewiesen; KOLIBIAR [1] zeigte für beliebiges $(E, \leqq)$ die Äquivalenz von $(JHK_{\mathscr{E}_{\beta_1 \mathscr{Z}}, \mathfrak{A}})$, $(JHK_{\beta_1 \mathscr{Z}, \mathscr{E}_{\beta_1 \mathscr{Z}}, \mathfrak{A}})$ und $(A_{6(1)})$. Der Satz aus 2.3 findet sich für $\mathscr{Z}$ bei MACLANE [1], für $\beta_{\frac{1}{2}} \mathscr{Z}$ bei BENADO [4], für $\beta_1 \mathscr{Z}$ bei KOLIBIAR [1].

Sei $\mathfrak{V}_n$ die Menge aller $\beta_n\,\mathscr{Z}$-Vierecke in $(E, \leqq)$ $(n=1, 2, \ldots)$; durch einen Auswahlprozeß bestimme man für alle a, b zu jedem $\beta_n\,\mathscr{Z}$-Viereck zwischen a, b ein Paar von Seiten L_1, L_2 und Elemente x_i in L_i mit $x_i \neq a$, $x_i \neq b$ $(i=1, 2)$; sei $\mathfrak{W}_n$ die Menge derjenigen unter den so entstehenden Vierecken $(\{a, x_1, b\}, \{a, x_2, b\})$, die in $\mathfrak{V}_n$ liegen. Wegen (A_5) ist es dann in $(A_6(n))$ hinreichend, die Gültigkeit dieser Bedingung nur für $\beta_n\,\mathscr{Z}$-Vierecke aus $\mathfrak{W}_n$ zu verlangen. Ist $(E, \leqq)$ diskret geordnet, so kann man die x_i numerischen Bedingungen unterwerfen: $1 \leqq d(a, x_i) \leqq m_i$, $1 \leqq d(x_i, b) \leqq l_i$ $(i=1, 2)$; betrachtet man alle $\beta_n\,\mathscr{Z}$-Vierecke $(\{a, x_1, b\}, \{a, x_2, b\})$ mit diesen Eigenschaften, so hat man $\mathfrak{W}_n$ wieder vergrößert (Benado [4] gibt durch seine Bedingungen $\mathscr{B}_1$, $\mathscr{B}_2$ zwei solcher Oberklassen von $\mathfrak{W}_1$ an: alle $\beta_1\,\mathscr{Z}$-Vierecke mit $m_1=m_2=1$ und alle $\beta_1\,\mathscr{Z}$-Vierecke mit $l_1=l_2=1$).

Sei $\mathscr{Z}_p$ die Relation, Komponente des gleichen einfachen Viereckes in $(E, \leqq)$ zu sein; es gilt $\mathscr{Z}_p \subseteq \gamma_{\mathfrak{A}}\,\mathscr{Z}$. Da für jede Menge $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ gilt $\gamma_{\mathfrak{A}}\,\mathscr{Z} \subseteq \gamma_{\mathfrak{B}}\,\mathscr{Z}$, folgt aus $\gamma_{\mathfrak{B}}\,\mathscr{Z} = \mathscr{Z}_p$ auch $\gamma_{\mathfrak{A}}\,\mathscr{Z} = \mathscr{Z}_p$, aus $\gamma_{\mathfrak{B}}\,\mathscr{Z} \cap (\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2) = \mathscr{Z}_p$ auch $\gamma_{\mathfrak{A}}\,\mathscr{Z} \cap (\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2) = \mathscr{Z}_p$.

3. Nachbarschaftsbedingungen. 3.0. Der Nachweis von Jordan-Hölder-Sätzen schon für $\mathscr{E}_{\mathscr{Z}}$ scheint auch in den so noch übrig bleibenden Fällen günstiger Lage mühsam genug — bei aller Seltenheit bereits der $\beta_1\,\mathscr{Z}$-Vierecke. Es sollen nun einfache Bedingungen untersucht werden, welche die Gültigkeit solcher Sätze in Fällen günstiger Lage zur Folge haben — diese beschrieben durch $\mathscr{Z}$. In ihnen tritt als wesentlich die Nachbarschaftsrelation auf, ferner sind sie *lokaler* Natur: zu je vier, in gewisser Situation befindlichen Elementen soll ein bestimmtes weiteres Element existieren.

3.1. Sei $(E, \leqq)$ eine geordnete Menge; seien R_i $(i=1, 2, 3, 4)$ binäre Relationen auf E, und sei $\leqq$ *gröber* als jedes R_i: aus xR_iy folge $x \leqq y$ $(i=1, 2, 3, 4)$. Weiter soll R_1 gröber sein als R_3, und es gelte

(A_{R_2}) *für alle* x, y, z *aus* E: *wenn* $x \lhd y$, yR_2z, *so* xR_2z

sowie

$(A_{R_1R_2R_3R_4})$ *für alle* x, y, z, v *aus* E: *wenn* $x \lhd y$, $y \leqq z$, $y \neq z$, zR_1v, yR_2v, xR_4z, *so existiert* r *in* E *mit*

$z \lhd r$ *oder* $r=z$,

yR_4r,

rR_3v *oder* $r=z$;

offenbar ist (A_{R_2}) äquivalent zu derjenigen Aussage, die bei Ersetzung von $x \lhd y$ durch $x \lhd\lhd y$ aus ihr entsteht, und man sieht sofort, daß wegen (A_{R_2}) auch in $(A_{R_1R_2R_3R_4})$ gleichzeitig $x \lhd y$ durch $x \lhd\lhd y$ sowie $z \lhd r$ *oder* $r=z$ durch $z \lhd\lhd r$, $d(z, r) \leqq d(x, y)$ ersetzt werden darf.

Dann ist die Aussage

$(C^{\vee}_{R_1R_2R_3R_4})$ *für alle* s, t, u, v *aus* E: *wenn* $s \| t$, $u \lhd t$, sR_1v, tR_2v, uR_4s, *so existiert* r *in* E *mit* $s \lhd r$, tR_4r, rR_3v

äquivalent zu

$(C^{*\vee}_{R_1R_2R_3R_4})$ *für alle* s, t, u, v *aus* E: *wenn* $u \lhd\lhd t$, sR_1v, tR_2v, uR_4s, *so existiert* r *in* E *mit*

$s \lhd\lhd r$,

$d(s, r) \leqq d(u, t)$,

tR_4r *oder* $r = t$,

rR_3v *oder* $r = t$ *oder* $r = s$.

Denn aus $(C^{*\vee}_{R_1R_2R_3R_4})$ folgt $(C^{\vee}_{R_1R_2R_3R_4})$, da für s, t, u, v aus $(C^{\vee}_{R_1R_2R_3R_4})$ auch die Voraussetzung von $(C^{*\vee}_{R_1R_2R_3R_4})$ erfüllt ist und mit einem zugehörigen r dann wegen $s \| t$, $s \leqq r$, $t \leqq r$ gilt $r \neq s$, $r \neq t$, $d(s, r) = 1$. Für die umgekehrte Implikation nehme man noch $d(u, t) = n$ in die Voraussetzung von $(C^{*\vee}_{R_1R_2R_3R_4})$ auf, so daß eine Aussage $X(n)$ entsteht; $X(0)$ erfüllt man durch r gleich s, $X(1)$ folgt für $s \| t$ aus $(C^{\vee}_{R_1R_2R_3R_4})$, für $s \leqq t$ ist dann nur $s = u$ oder $s = t$ möglich, so daß man r gleich t setzen kann, und für $t \leqq s$, $t \neq s$ ersetze man s, t, u, v durch z, y, x, v und wende $(A_{R_1R_2R_3R_4})$ an. Sei $X(k)$ für alle k mit $0 \leqq k < n$, $1 < n$, bewiesen, und sei für s, t, u, v die Voraussetzung von $X(n)$ erfüllt; man wähle t_1 in E mit $u \lhd\lhd t_1$, $t_1 \lhd t$, $d(u, t_1) = n - 1$, und bestimme, da t_1R_2v wegen (A_{R_2}), zu s, t_1, u, v vermöge $X(n-1)$ ein r_1 mit $s \lhd\lhd r_1$, $d(s, r_1) \leqq d(u, t_1)$, $t_1R_4r_1$ oder $r_1 = t_1$, t_1R_3v oder $r_1 = t_1$ oder $r_1 = s$. Falls $r_1 = t_1$, so setze man r gleich t: wegen $s \lhd\lhd r_1 \lhd t$, $d(s, t) \leqq d(s, r_1) + 1 \leqq d(u, t_1) + 1 = d(u, t)$ ist dies möglich. Falls $r_1 \neq t_1$, so $t_1R_4r_1$, r_1R_1v da sR_1v und R_1 gröber als R_3, weiter noch tR_2v, $t_1 \lhd t$, so daß man zu r_1, t, t_1, v vermöge $X(1)$ ein r bestimmen kann mit $r_1 \lhd\lhd r$, $d(r_1, r) \leqq d(t_1, t)$, tR_4r oder $r = t$, rR_3v oder $r = t$ oder $r = r_1$. Daraus folgt $s \lhd\lhd r_1 \lhd\lhd r$, $d(s, r) \leqq d(s, r_1) + d(r_1, r) \leqq d(u, t_1) + d(t_1, t) = d(u, t)$; und da $r_1 \neq s$ wegen $r_1 \neq t_1$ zu r_1R_3v führt, gilt auch im Falle $r = r_1$, $r \neq s$ noch immer rR_3v.

Insbesondere folgt aus $(C^{\vee}_{R_1R_2R_2R_4})$ *für reflexives* R_2

$(D_{R_1R_4})$ *für alle* a, b, c *aus* E: *wenn* $a \lhd\lhd b$, aR_4c, cR_1b, *so* $c \lhd\lhd b$, $d(c, b) \leqq d(a, b)$

(eine Analyse des letzten Beweises lehrt, daß man hier statt der Reflexivität von R_2 nur zu verlangen braucht, daß R_2 gröber sei als $\lhd$); wegen (A_{R_2}) ist R_2 genau dann reflexiv, wenn es gröber ist als $\lhd\lhd$.

Für den Rest von 3.1 sei R_2 reflexiv, R_1 gröber als R_3, und es gelte (A_{R_1}), (A_{R_3}). — Die Relation $\lhd$ besitzt für alle R_1, R_2, R_3 die Eigenschaft $(A_{R_1R_2R_3\lhd})$: da nicht zugleich $x \lhd y$, $x \lhd z$, $y \leqq z$, $y \neq z$ gelten kann, ist die Voraussetzung stets leer. $(C^{\vee}_{R_1R_2R_3\lhd})$ *folgt aus*

$(C^{\vee}_{R_1R_2R_3})$ *für alle* s, t, u, v *aus* E: *wenn* $s \| t$, $u \lhd t$, $u \lhd s$, sR_1v, tR_2v, *so existiert* r *in* E *mit* $s \lhd r$, tR_1r, rR_3v.

Denn gilt $(C^{\vee}_{R_1R_2R_3})$ und erfüllen s, t, u, v die Voraussetzungen von $(C^{\vee}_{R_1R_2R_3\lhd})$, so wähle man r gemäß $(C^{\vee}_{R_1R_2R_3})$; dann ist für t, s, u, r die Voraussetzung von $(C^{\vee}_{R_1R_2R_3})$ erfüllt, so daß es r' mit $t \lhd r'$, sR_1r', $r'R_3r$ gibt. Daraus aber folgt

$s \leqq r'$, $r' \leqq r$; wegen $t \leqq r'$, $s \| t$ und $s \lhd r$ also $r' = r$. — *Ist* R_1 *gröber als* $\lhd$, *so sind* $(C^{\vee}_{R_1 R_2 R_3})$ *und* $(C^{\vee}_{R_1 R_2 R_3 \lhd})$ sogar *äquivalent.*

Aus $(C^{\vee}_{R_1 R_2 R_3})$ *folgt*

$(D^{*}_{R_1})$ *für alle* a, b, c *aus* E: *wenn* $a \lhd\lhd b$, $a \lhd\lhd c$, $c R_1 b$, *so* $c \lhd\lhd b$, $d(c, b) \leqq d(a, b)$.

Das ist für $d(a, c) = 0$ klar und für $d(a, c) = 1$ gerade $(D_{R_1 \lhd})$; ist es für alle a', b', c' mit $0 \leqq d(a', c') < n$, $1 < n$, bewiesen und erfüllen a, b, c die Voraussetzung mit $d(a, c) = n$, so wähle man c_1 mit $a \lhd\lhd c_1$, $c_1 \lhd c$, $d(a, c_1) = n - 1$. Wegen (A_{R_1}) gilt $c_1 R_1 b$, so daß die Induktionsannahme zu $c_1 \lhd\lhd b$ führt; Anwendung von $(D_{R_1 \lhd})$ auf c_1, b, c gibt $c \lhd\lhd b$, weiter $d(c, b) \leqq d(c_1, b) \leqq d(a, b)$.

Für das Folgende sei noch R_1 gröber als R_2. Für $(C^{\vee}_{R_1 R_2 R_2})$ schreibe man dann $(B^{\vee}_{R_1 R_2})$; $(B^{\vee}_{R_1 R_2})$ *ist äquivalent zu*

$(B^{*\,\vee}_{R_1 R_2})$ *für alle* s, t, u, v *aus* E: *wenn* $u \lhd\lhd t$, $u \lhd\lhd s$, $s R_1 v$, $t R_2 v$, *so existiert* r *in* E *mit* $s \lhd\lhd r$, $t \lhd\lhd r$, $d(s, r) \leqq d(u, t)$, $d(t, r) \leqq d(u, s)$, $r R_2 v$ *oder* $r = s$.

Denn $(B^{\vee}_{R_1 R_2})$ ist äquivalent zu $(C^{\vee}_{R_1 R_2 R_2 \lhd})$; definiert man $x R_4^{(i)} z$ durch $x \lhd\lhd z$, $d(x, z) \leqq i$, $i \geqq 0$ ganz, so liefert $(C^{*\,\vee}_{R_1 R_2 R_2 \lhd})$ bei Vertauschung von s, t die Aussage $(C^{\vee}_{R_2 R_1 R_2 R^{(i)}_4})$ und bei Ersetzung von s, t, u, v durch y, z, x, v auch $(A_{R_2 R_1 R_2 R_4^{(i)}})$. Daher gilt für jedes i $(C^{*\,\vee}_{R_2 R_1 R_2 R^{(i)}_4})$, und daraus folgt $(B^{*\,\vee}_{R_1 R_2})$: man vertausche s, t und wähle i gleich $d(u, t)$. (Wenn sogar $R_1 = R_2$, so läßt sich $(B^{*\,\vee}_{R_1 R_2})$ ohne Rückgriff auf frühere Sätze beweisen: man bilde aus $(B^{*\,\vee}_{R_1 R_2})$ eine Aussage $X(i, k)$ durch Aufnahme von $d(u, t) = i$, $d(u, s) = k$ in die Voraussetzung; man erledige zunächst die Fälle $X(0, k)$, $X(1, 1)$. Ist $X(j, h)$ für $j + h < n$, $2 < n$, bewiesen und $i + k = n$, so kann man wegen der Äquivalenz von $X(i, k)$ und $X(k, i)$ dann $1 < k$ annehmen und mit nur *einem* Induktionsschritt von $X(i, k - 1)$ auf $X(i, k)$ schließen. — Aus $(B^{*\,\vee}_{R_1 R_2})$ folgt übrigens sofort $(D^{*}_{R_1})$.)

Ist R_1 noch reflexiv, $R_1 = R$, so kann man für R_2 auch $\lhd\lhd$ wählen; für $(B^{\vee}_{R \lhd\lhd})$ schreibe man dann

$(B^{\vee}_{R})$ *für alle* s, t, u, v *aus* E: *wenn* $s \| t$, $u \lhd t$, $u \lhd s$, $s R v$, $t \lhd\lhd v$, *so existiert* r *in* E *mit* $s \lhd r$, $t R r$, $r \lhd\lhd v$;

$(B^{\vee}_{R})$ *ist äquivalent zu* $(C^{\vee}_{R \lhd\lhd R})$. Denn für r aus $(C^{\vee}_{R \lhd\lhd R})$ gilt dann $u \lhd\lhd r$, $r R v$, $u \lhd\lhd v$, so daß mit (D^{*}_{R}) auch $r \lhd\lhd v$ folgt. Somit ist $(B^{\vee}_{R})$ auch äquivalent zu $(C^{\vee}_{R \lhd\lhd \lhd\lhd \lhd})$ ($t \lhd r$ statt $t R r$) und zu $(C^{\vee}_{R \lhd\lhd R \lhd})$ ($t \lhd r$, $r R v$ statt $t R r$, $r \lhd\lhd v$).

Für $(B^{\vee}_{\lhd\lhd})$ werde auch $(B^{\vee}_{3})$ geschrieben; $(B^{\vee}_{R})$ *ist äquivalent zur Konjunktion von* (B_3) *und* (D^{*}_{R}), weiter, wenn R_β gröber als R_α, $(B^{\vee}_{R\beta})$ äquivalent zur Konjunktion von $(B^{\vee}_{R\alpha})$ und $(D^{*}_{R\beta})$.

Für $(B_{\leqq\leqq})$ werde

$(B^{\vee}_{2})$ *für alle* s, t, u, v *aus* E: *wenn* $s \| t$, $u \lhd t$, $u \lhd s$, $s \leqq v$, $t \leqq v$, *so existiert* r *in* E *mit* $s \lhd r$, $t \leqq r$, $r \leqq v$

geschrieben[4]); da aus $(B_2^\vee)$ dann $(D_\leqq^*)$ folgt, *hat* $(B_2^\vee)$ *jedes* $(B_R^\vee)$ *und insbesondere* $(B_3^\vee)$ *zur Folge.*

Die Relation $\leqq$ besitzt für alle R_1, R_2, R_3 die Eigenschaft $(A_{R_1 R_2 R_3 \leqq})$; für $(C^\vee_{\leqq\leqq\leqq\leqq})$ werde auch

$(B_1^\vee)$ *für alle* s, t, u, v *aus* E: *wenn* $s \| t$, $u \lhd t$, $u \leqq s$, $s \leqq v$, $t \leqq v$, *so existiert* r *in* E *mit* $s \lhd r$, $t \leqq r$, $r \leqq v$

geschrieben[5]); aus $(B_1^\vee)$ folgt $(B_2^\vee)$; es wird in 3.2 gezeigt werden, daß die aus $(B_1^\vee)$ folgende Aussage $(D_{\leqq\leqq})$ sich dann zu (KON) verschärfen läßt. *Ist* E *diskret geordnet, so ist* $(B_1^\vee)$ *zu* $(B_2^\vee)$ *und offenbar auch* $(B_2^\vee)$ *zu* $(B_3^\vee)$ *und zu allen* $(B_R^\vee)$ *äquivalent*[6]): die Voraussetzungen von $(B_1^{*\vee})$, nämlich $(C^{*\vee}_{\leqq\leqq\leqq\leqq})$, sind dann identisch mit denen von $(B_2^{*\vee})$, nämlich $(B^{*\vee}_{\leqq\leqq})$. *Folglich gilt* $(B_3^\vee)$ *in* $(E, \leqq)$ *genau dann, wenn eine der Aussagen* $(B_1^\vee)$, $(B_2^\vee)$, $(B_R^\vee)$, $(B_3^\vee)$ *in* $(E, \lhd\lhd)$ *gilt.*

3.2. Sei $(E, \leqq)$ eine geordnete Menge, $\mathfrak{B}$ eine Klasse von Ultraketten in $(E, \leqq)$, welche die Klasse $\mathfrak{F}$ aller endlichen Ultraketten in $(E, \leqq)$ enthält; man definiere eine Relation R auf E durch aRb genau dann, wenn eine Ultrakette aus $\mathfrak{B}$ zwischen a, b existiert. Weiter sei $\mathfrak{B}$ so beschaffen, daß für die Relation R die Aussagen (A_R) und

$(A_\mathfrak{B})$ *für alle* x, z *aus* E: *für alle* K *aus* $\mathfrak{B}$: *wenn* K *Ultrakette zwischen* x, z, *so existiert* y *in* K *mit* $x \lhd y$, yRz

gelten. Jede unendliche Ultrakette aus $\mathfrak{B}$ besitzt dann einen Ordnungstypus $\omega + \xi$ (ξ beliebig), also einen *Anfang*, welcher zu den natürlichen Zahlen ordnungsisomorph ist, und die Menge aller Ultraketten mit dieser Eigenschaft, vereinigt mit $\mathfrak{F}$, liefert ein Beispiel einer Klasse $\mathfrak{B}$. Weitere Beispiele sind $\mathfrak{F}$ selbst ($R = \lhd\lhd$), ferner die Klasse $\mathfrak{B}_w$ aller wohlgeordneten Ultraketten in $(E, \leqq)$ sowie für jede transfinite Ordnungszahl λ die Klasse $\mathfrak{B}_\lambda$ aller der wohlgeordneten Ultraketten in $(E, \leqq)$, deren Ordnungstypus nicht größer ist als λ — diese $\mathfrak{B}_\lambda$ werden für große λ gleich $\mathfrak{B}_w$.

Gilt $(B_K^\vee)$ *in* $(E, \leqq)$, *so* $\mathscr{Z} \cap (\mathfrak{F} \times \mathfrak{B}) = \mathscr{Z}_p$ (eine einfache Zelle ist ein Viereck, wenn eine ihrer Komponenten endlich ist und die andere zu $\mathfrak{B}$ gehört;) *gilt*

[4]) Die zu $(B_2^\vee)$ äquivalente Aussage $(C_{\leqq\leqq\leqq\lhd})$ ist gerade die *quadrilateral condition* von ORE [1]. Für beschränkt längenendliche Verbände findet sie sich bei BIRKHOFF [1]; solche ihr genügende Verbände werden bei KLEIN [2] als *Birkhoffsch* bezeichnet, bei BIRKHOFF [2] als *semimodular*. Inzwischen ist der Name semimodular bei nicht beschränkt längenendlichen Verbänden durch CROISOT [1] an eine Klasse von Verbänden vergeben worden, welche enger ist als die der $(B_2^\vee)$ genügenden. Für geordnete Mengen betrachtete KLEIN [4] eine wenig leistende Abschwächung von $(B_2^\vee)$ als *Axiom C*.

[5]) Diese Bedingung findet sich implizite schon bei DEDEKIND [1], § 6, Th. XII, explizite für beschränkt längenendliche Verbände bei BIRKHOFF [1] und KLEIN [2].

[6]) Für beschränkt längenendliches $(E, \leqq)$ zeigte dies BENADO [3], Th. 4.73; für beschränkt längenendliche Verbände bereits BIRKHOFF [1], Th. 9.1, KLEIN [2], Th. 10, KOŘINEK [2], [3], Th. 3.3. Wie sich zeigen wird, ist $(E, \leqq)$ bei Gültigkeit einer dieser Aussagen auch beschränkt längenendlich.

$(B_1^\vee)$ *in* $(E, \leqq)$, *so* $\mathscr{Z} \cap (\mathfrak{F} \times \mathfrak{A}) = \mathscr{Z}_p$ (eine einfache Zelle ist ein Viereck, wenn eine ihrer Komponenten endlich ist).

Gilt $(B_K^\vee)$ *in* $(E, \leqq)$, *so auch* $(JHK_{\mathscr{E}\mathscr{Z}_p, \mathfrak{B}})$; *gilt* $(B_1^\vee)$ *in* $(E, \leqq)$, *so auch* $(JHK_{\mathscr{E}\mathscr{Z}_p, \mathfrak{A}})$; *insbesondere ist* $(JHK_{\mathscr{E}\mathscr{Z}_p, \mathfrak{B}_w})$ *eine Folge von* $(B_2^\vee)$, denn $(B_2^\vee)$ impliziert jedes $(B_K^\vee)$. Wegen 2.1 genügt es zum Beweis, *non* $\mathscr{Z} \cap (\mathfrak{F} \times \mathfrak{B}) \subseteqq \mathscr{N}_\mathfrak{B} \cup non\,\mathscr{D}$ und *non* $\mathscr{Z} \cap (\mathfrak{F} \times \mathfrak{A}) \subseteqq \mathscr{N}_\mathfrak{A} \cup non\,\mathscr{D}$ zu zeigen, und dabei ist *non* $\mathscr{Z} \subseteqq \mathscr{N}_\mathfrak{A} \cup non\,\mathscr{D}$ nach 2.4 bereits gesichert. Gelte also $(B_K^\vee)$ in $(E, \leqq)$, seien K, L Ultraketten zwischen a, b mit K *non* $\mathscr{Z} \cap (\mathfrak{F} \times \mathfrak{B}) L$, $K \neq L$; man wähle x in K, y in L mit $a \lhd x$, $a \lhd y$; wenn $x = y$, so $K \mathscr{M}_\mathfrak{B} L$; wenn $x \neq y$, so liefert Anwendung von $(B_K^\vee)$ auf x, y, a, b ein z mit zRb, sogar $z \lhd\lhd b$; da wegen $x \lhd z$, $y \lhd z$, K *non* $\mathscr{Z}$ L gewiß $z \neq b$, kann man jetzt wie in 2.4 auf $L \mathscr{N}_\mathfrak{B} L$ schließen[7]).

Da bei dem Nachweis von *non* $\mathscr{Z} \subseteqq \mathscr{N}_\mathfrak{A} \cup non\,\mathscr{D}$ in 2.4 das Auswahlaxiom benutzt wurde, sei bemerkt, daß man mit $(B_1^\vee)$ auch ohne jenes auf *non* $\mathscr{Z} \cap (\mathfrak{F} \times \mathfrak{A}) \subseteqq \mathscr{N}_\mathfrak{A} \cup non\,\mathscr{D}$ schließen kann. Dazu genügt es offenbar, (KON) zur Verfügung zu haben — durch Induktion nach $d(a, b)$ zeigt man aber (ORE): seien K, L Ultraketten zwischen a, b, K in $\mathfrak{F}$ und von kürzester Länge, und mögen K, L außer a, b keine Elemente gemeinsam haben; liegt x in K mit $x \lhd b$, so gilt für jedes von a, b verschiedene y aus L wegen $(B_1^{*\vee})$ dann $y \lhd\lhd b$, $d(y, b) \leqq d(a, b) - 1$ (falls $y \leqq x$, muß die Induktionsannahme ausgenutzt werden!). Wenn $d(a, b) = 2$, so gibt es daher genau ein solches y in L; wenn aber $d(a, b) > 2$ und es mehr als $d(a, b) - 1$ von a, b verschiedene y in L gäbe, so wäre für mindestens zwei von ihnen die Zahl $d(y, b)$ die gleiche, und da die beiden y vergleichbar wären, hätte man einen Widerspruch zur Induktionsannahme. — Ist *non* $\mathscr{Z} \cap (\mathfrak{F} \times \mathfrak{B}) \subseteqq \mathscr{N}_\mathfrak{B} \cup non\,\mathscr{D}$ einmal bewiesen, so kann man wegen der Äquivalenz von $(JHK_{\mathscr{E}\mathscr{Z}, \mathfrak{B}})$ zur Konjunktion von (JD) und $(FIN_\mathfrak{B})$ zum Beweis der letzten Aussagen auch so vorgehen, daß aus $(B_K^\vee)$ direkt (JD) und $(FIN_\mathfrak{B})$ abgeleitet werden (der Schluß von $(B_1^\vee)$ auf (ORE), eben die Konjunktion von (JD) und $(FIN_\mathfrak{A})$, wurde ja soeben durchgeführt); aus $(JHK_{\mathscr{E}\mathscr{Z}, \mathfrak{B}})$ folgt wieder $(JHK_{\mathscr{E}\mathscr{Z}_p, \mathfrak{B}})$. Gilt $(B_K^\vee)$ in $(E, \leqq)$, so seien K, L Ultraketten zwischen a, b, K in $\mathfrak{F}$ und von kürzester Länge, L in $\mathfrak{B}$; für ein Induktionsverfahren kann man annehmen, daß K, L nur a, b gemeinsam haben. Man wähle x in K mit $x \lhd b$, y in L mit $a \lhd y$; Anwendung von $(B_K^{*\vee})$ auf x, y, a, b ergibt $y \lhd\lhd b$, $d(y, b) \leqq d(a, x)$ (falls $y \leqq x$, muß die Induktionsannahme ausgenutzt werden!); da K von kürzester Länge war,

[7]) Die Idee, daß $(B_2^\vee)$ die einfachen Zellen mit endlichen Komponenten zu Vierecken werden läßt und daher Überlegungen wie die aus 2.4 angewendet werden können, rührt im Wesentlichen von Ore [1] her; dort wird in geordneten Mengen $(JHK_{\mathscr{E}\mathscr{Z}_p, \mathfrak{F}})$ aus $(B_2^\vee)$ gefolgert. Schon Dedekind [1], § 6, Th. XVI, hatte (JD) für modulare beschränkt längenendliche Verbände bewiesen, dabei aber nur $(B_1^\vee)$ und die dazu duale Aussage benutzt. Birkhoff [1], Th. 8.2, Th. 15.2 verschärfte (JD) für beschränkt längenendliche Verbände mit $(B_2^\vee)$ zu einer $(JHK_{\mathscr{E}\mathscr{Z}, \mathfrak{F}})$ verwandten Aussage. Der durch $(B_1^\vee)$ ermöglichte Endlichkeitsschluß scheint für Verbände zuerst von Croisot [1] und Szas [1] gefunden worden zu sein, man vergleiche auch Hermes [1], p. 72; daß $(B_2^\vee)$ in Verbänden auf $(JHK_{\mathscr{E}\mathscr{Z}, \mathfrak{B}_w})$ zu schließen erlaubt, bemerkte Vilhelm [1], Th. 3.3.

gilt $d(y, b) \leqq d(a, x) < d(a, b)$, so daß nach Induktionsannahme auch $L \cap [y, b]$ endlich ist und die Länge $d(y, b)$, $d(y, b) = d(a, b) - 1$, hat: L ist endlich mit der Länge $d(a, b)$.

Die Aussage $(B_3^\vee)$ ist nichts anderes als eine Aussage über den diskreten Teil $\lhd\lhd$ der Ordnung $\leqq$; die Aussagen $(B_1^\vee)$ und $(B_K^\vee)$ beschreiben hingegen, in welcher Weise die Relation $\lhd\lhd$ in die Relation $\leqq$ *eingelagert* ist. Aus $(B_2^\vee)$ folgt sogar, daß schon diejenigen einfachen Zellen zu Vierecken werden, deren beide Komponenten etwa wohlgeordnet sind $(\mathscr{Z} \cap (\mathfrak{B}_w \times \mathfrak{B}_w) = \mathscr{Z}_p)$, und wenn $(B_1^\vee)$ gilt, braucht man dazu nur das Wohlgeordnetsein einer der Komponenten zu fordern $(\mathscr{Z} \cap (\mathfrak{B}_w \times \mathfrak{A}) = \mathscr{Z}_p)$ — jedoch findet man leicht Beispiele von Verbänden, in denen $(B_1^\vee)$ gilt und zwischen zwei Elementen a, b unendliche Ultraketten von Typ ω liegen (die dann keine Komponenten von Zellen sein können). Die aus $(B_1^\vee)$ und $(B_3^\vee)$ gefolgerten Sätze $(JHK_{\mathscr{E}\mathscr{Z}_p, \mathfrak{A}})$ und $(JHK_{\mathscr{E}\mathscr{Z}_p, \mathfrak{F}})$ gehen bei dem Übergang von $\leqq$ zur inversen Ordnung $\geqq$ in sich über, sie folgen daher auch aus den dualen Bedingungen $(B_1^\wedge)$ und $(B_3^\wedge)$; für die Dualisierung von $(B_K^\vee)$ und $(JHK_{\mathscr{E}\mathscr{Z}_p, \mathfrak{B}})$ muß man von der Klasse $\mathfrak{B}$ zur dual definierten übergehen.

3.3. Sei $(E, \leqq)$ eine geordnete Menge; man definiere eine binäre Relation $\mathscr{Z}^\delta$ für endliche Ultraketten K, L in $(E, \leqq)$ durch $K \mathscr{Z}^\delta L$ genau dann, wenn (K, L) eine Zelle in der geordneten Menge $(E, \lhd\lhd)$ ist; *stets gilt* $\mathscr{Z} \cap (\mathfrak{F} \times \mathfrak{F}) \subseteqq \mathscr{Z}^\delta$, *aus* $(B_3^\vee)$ *folgt* $\mathscr{Z}^\delta = \mathscr{Z}_p$. *Aus* $\mathscr{Z}^\delta = \mathscr{Z}_p$ *folgen* $(JHK_{\mathscr{E}\mathscr{Z}^\delta, \mathfrak{F}})$ *und* $(JHK_{\mathscr{E}\mathscr{Z}_p, \mathfrak{F}})$. Denn in der geordneten Menge $(E, \lhd\lhd)$ erschließt man wie in 2.4 *non* $\mathscr{Z}^\delta \subseteqq \mathscr{N}_{\mathfrak{F}} \cup$ *non* $\mathscr{D}$, $\mathscr{Z}^\delta = \mathscr{Z}_p$ liefert $(JHK_{\mathscr{Z}^\delta, \mathscr{E}\mathscr{Z}^\delta, \mathfrak{F}})$, so daß das Reduktionstheorem aus 2.1, angewandt auf $(E, \lhd\lhd)$, dort $(JHK_{\mathscr{E}\mathscr{Z}^\delta, \mathfrak{F}})$ ergibt — das aber besagt in $(E, \leqq)$ dann $(JHK_{\mathscr{E}\mathscr{Z}_p, \mathfrak{F}})$.

Es wird behauptet, daß $(B_3^\vee)$ *in* $(E, \leqq)$ *gleichwertig sei zur Konjunktion von* $\mathscr{Z}^\delta = \mathscr{Z}_p$ *mit der Aussage*

(A_7) *es gibt keine* s, t, u, v, x, y, z *in* E *mit folgenden Eigenschaften:* $s \| t$, $s \| z$, $t \| z$, $u \lhd s \lhd x \lhd v$, $u \lhd t \lhd y \lhd v$, $u \lhd z \lhd x$, $z \lhd y$, *für alle* r *mit* $s \lhd\lhd r \lhd\lhd v$, $t \lhd\lhd r$ *gilt* $r = v$ [8]).

Zunächst ist klar, daß diese Bedingungen notwendig für $(B_3^\vee)$ sind; sei nun umgekehrt $(B_3^\vee)$ in $(E, \leqq)$ nicht erfüllt, man kann annehmen, daß $\mathscr{Z}^\delta = \mathscr{Z}_p$ gilt, so daß (A_7) zu falsifizieren ist. Über $(JHK_{\mathscr{E}\mathscr{Z}, \mathfrak{F}})$ folgt aus $\mathscr{Z}^\delta = \mathscr{Z}_p$ auch (JD); da $(B_3^\vee)$ nicht gilt, gibt es Quadrupel von Elementen aus E, die den Voraussetzungen von $(B_3^\vee)$ genügen, ohne daß die zugehörige Behauptung

[8]) Für beschränkt längenendliche Verbände bewies dies (mit $(B_2^\vee)$ an Stelle von $(B_3^\vee)$) VILHELM [2], Th. 2.2; aus diesem Grunde wird dort $\mathscr{Z} = \mathscr{Z}_p$ als *selbstdualer Kern* von $(B_2^\vee)$ bezeichnet. In solchen Verbänden besagt (A_7) die Nicht-Existenz eines gewissen, aus 7 Elementen bestehenden Teilverbandes; allgemein bedeutet (A_7) gerade die Nicht-Existenz von 7 Elementen, die in ihrer konvexen Hülle, geordnet durch die Spur von $\lhd\lhd$, einen solchen Teilverband bilden. Ist insbesondere $(E, \lhd\lhd)$ ein Verband, so folgt das oben Behauptete sogleich aus dem Satz von VILHELM.

erfüllt wäre; unter diesen wähle man s, t, u, v mit für diese Eigenschaft minimalem $d(u, v)$. Wegen dieser Minimalität ist dann v in $(E, \lhd\!\lhd)$ minimale obere Schranke von $\{s, t\}$; wegen des Nichterfülltseins von $(B_3^{\vee})$ für s, t, u, v gibt es etwa ein x und wegen (JD) dann auch ein y in E mit $s \lhd\!\lhd x \lhd\!\lhd v$, $t \lhd\!\lhd y \lhd\!\lhd v$, $x \| y$, $x \neq s$, $x \neq v$, $y \neq t$, $y \neq v$. Da v dann in $(E, \lhd\!\lhd)$ minimale obere Schranke auch von $\{x, y\}$ ist, kann man überdies x, y wegen $\mathscr{L}^{\flat} = \mathscr{L}_p$ so wählen, daß ein z in E mit $u \lhd\!< z \lhd\!\lhd x$, $z \lhd\!\lhd y$, $z \neq u$ existiert, ferner nicht $s \leqq z$, wegen $u \lhd s$ daher $z \| s$, ebenso $z \| t$. Wegen $d(u, x) < d(u, v)$ und der Minimalität von $d(u, v)$ kann man jetzt $(B_3^{*\vee})$ auf s, z, u, x anwenden (oder: wegen (JD) ist $(E, \lhd\!\lhd)$ beschränkt längenendlich, so daß dort $(B_3^{\vee})$ und $(B_1^{\vee})$ übereinstimmen und man auf s, z, u, x $(B_1^{\vee})$ anwenden kann) und ein r_1 finden mit $z < r_1$, $s \lhd\!< r_1 \lhd\!< x$, ebenso ein r_2 mit $z \lhd r_2$, $t \lhd\!\lhd r_2 \lhd\!\lhd y$. Da $d(z, v) < d(u, v)$, kann man $(B_3^{\vee})$ auf r_1, r_2, z, v anwenden; da aber wieder v in $(E, \lhd\!\lhd)$ minimale obere Schranke von $\{r_1, r_2\}$, muß $r_1 \lhd v$, $r_2 \lhd v$ gelten, also $r_1 = x$, $r_2 = y$. Kann man nun $u \lhd z$ zeigen, so gilt wegen (JD) auch $s \lhd x$, $t < y$, so daß dann s, t, u, v, x, y, z die Aussage (A_7) verletzen. Angenommen, $u < z$ gälte nicht; man wählte z_1 mit $u \lhd\!\lhd z_1$, $z_1 \lhd z$; Anwendung von $(B_3^{*\vee})$ auf s, z_1, u, x lieferte x_1 mit $z_1 \lhd x_1$, $s \lhd\!\lhd x_1 \lhd\!\lhd x$, wegen $z_1 \lhd z \lhd x$ aber $d(z_1, x) = 2$, so daß $x_1 \neq x$; ebenso fände man y_1 mit $z_1 \lhd y_1$, $t \lhd\!\lhd y_1 \lhd\!\lhd y$, $y_1 \neq y$. Da v in $(E, \lhd\!\lhd)$ minimale obere Schranke von $\{s, t\}$, gilt $x_1 \| y_1$; aus dem gleichen Grunde aber v in $(E, \lhd\!\lhd)$ auch minimale obere Schranke von $\{x_1, y_1\}$ - daher wäre $(B_3^{\vee})$ für x_1, y_1, z_1, v verletzt, und das wäre wegen $d(z_1, v) < d(u, v)$ ein Widerspruch zur Minimalität von $d(u, v)$.

4. Perspektivität. 4.0. In den folgenden Abschnitten werden konkrete Relationen $\mathscr{R}$ definiert, für die sich Sätze $(JHK_{\mathscr{R}})$ beweisen lassen. Diese Relationen $\mathscr{R}$ werden mit Hilfe einer binären, zwischen Intervallen erklärten Relation konstruiert: der Perspektivität.

4.1. Sei $(E, \leqq)$ eine geordnete Menge, seien $[x, y]$, $[w, z]$ zwei Intervalle von $(E, \leqq)$; man schreibe $[x, y] \mathscr{P} [w, z]$, wenn x maximale untere und z minimale obere Schranke von $\{y, w\}$ ist — wenn also $[x, y] = [w, z]$ oder $x = y$, $w = z$, $x \leqq w$ oder $\{x, y, z\}$, $\{x, w, z\}$ Ketten und Komponenten einer Zelle in $(E, \leqq)$ sind; die Relation $\mathscr{P}$ heiße *Perspektivität* und $[x, y]$ dann *perspektiv unter* $[w, z]$. Weiter sei $\mathscr{T}$ die von $\mathscr{P}$ erzeugte Äquivalenzrelation; $\mathscr{T}$ heiße *Projektivität* (man vgl. BIRKHOFF [2], p. 73).

Ist $(E, \leqq)$ Multiverband nach oben oder ist $(E, \leqq)$ diskret geordnet, so ist $(B_1^{\vee})$ äquivalent zu

$(P_1^{\vee})$ *für alle s, t, u, r aus E: aus $u \lhd t$, $[u, t] \mathscr{P} [s, r]$ folgt $s \lhd r$*

und zu

$(P_1^{*\vee})$ *für alle s, t, u, r aus E: aus $u \lhd\!\lhd t$, $[u, t] \mathscr{P} [s, r]$ folgt $s \lhd\!\lhd r$, $d(s, r) \leqq d(u, t)$;*

weiter $(B_2^\vee)$ *äquivalent zu Aussagen* $(P_2^\vee)$ *und* $(P_2^{*\vee})$, *die aus* $(P_1^\vee)$ *und* $(P_1^{*\vee})$ *durch Aufnahme von* $u \lhd s$ *oder* $u \lhd\lhd s$ *in die Voraussetzungen entstehen*[9]). Zunächst nämlich ist $(P_i^{*\vee})$ allemal eine Folge von $(B_i^{*\vee})$, $(P_i^\vee)$ eine Folge von $(P_i^{*\vee})$ $(i=1, 2)$. Ist weiter $(E, \leqq)$ diskret geordnet und gilt $(P_2^\vee)$ oder gar $(P_1^\vee)$, so folgt $\mathscr{Z} \cap (\mathfrak{F} \times \mathfrak{F}) = \mathscr{Z}_p$; wegen der Diskretheit gilt weiter $\mathscr{N}_{\mathfrak{A}} = \mathscr{N}_{\mathfrak{F}}$, so daß man auf $(JHK_{\mathscr{E}_{\mathscr{Z}_p}, \mathfrak{F}})$ schließen kann; insbesondere gilt daher (JD), $(E, \leqq)$ ist also beschränkt längenendlich und damit auch Multiverband. Sei nun $(E, \leqq)$ ein Multiverband nach oben, in dem $(P_i^\vee)$ gilt, und seien für s, t, u, v die Voraussetzungen von $(B_i^\vee)$ erfüllt $(i=1, 2)$. Man wähle r als minimale obere Schranke von $\{s, t\}$ mit $r \leqq v$; s, t, u, r erfüllen dann die Voraussetzungen von $(P_i^\vee)$, also gilt $s \lhd r$, und $(B_i^\vee)$ ist in Kraft $(i=1, 2)$.

4.2. Die aus $\mathscr{T}$ nach 2.0 definierte Relation $\varkappa\mathscr{T}$ ist λ-invariant, *so daß* $(JHI_{\mathscr{T}})$, nämlich $JHK_{\varkappa\mathscr{T}, \mathfrak{F}}$, *äquivalent ist zu* $(JHK_{\mathscr{Z}^\delta, \varkappa\mathscr{T}, \mathfrak{F}})$ (für beschränkt längenendliche Verbände: VILHELM [2], Th. 3.1). Gilt $(B_3^\vee)$ in $(E, \leqq)$, so wird für endliche Ultraketten $\mathscr{Z}$ zu $\mathscr{Z}_p$, und aus $\mathscr{Z}_p$ folgt $\varkappa\mathscr{T}$ trivial — *aus* $(B_3^\vee)$ *folgt daher* $(JHI_{\mathscr{T}})$, entsprechend für die in 3.2 betrachteten Klassen $\mathfrak{B}$ *aus* $(B_R^\vee)$ *dann* $(JHI_{\mathscr{T}})$ *zuzüglich* $(FIN_{\mathfrak{B}})$.

Allgemein hat bereits $(JHK_{\mathscr{E}_{\mathscr{Z}_p}, \mathfrak{F}})$ schon $(JHI_{\mathscr{T}})$ zur Folge, jedoch kann $\mathscr{E}_{\mathscr{Z}_p}$ von $\varkappa\mathscr{T}$ verschieden sein: man betrachte etwa eine Menge E von Elementen a_i $(i=1, \ldots, 13)$ und definiere eine Ordnung $\leqq$ durch $a_{13} \leqq x \leqq a_1$ für alle x, $a_{10} \leqq a_5 \leqq a_2$, $a_{10} \leqq a_6 \leqq a_2$, $a_{10} \leqq a_7 \leqq a_3$, $a_5 \leqq a_3$, $a_{11} \leqq a_6$, $a_{11} \leqq a_8 \leqq a_4$, $a_{12} \leqq a_9 \leqq a_4$, $a_{12} \leqq a_8$, $a_{12} \leqq a_7$, $a_9 \leqq a_3$; damit ist $(E, \leqq)$ ein Verband, und die Ketten $\{a_{11}, a_6, a_2, a_1\}$, $\{a_{11}, a_8, a_4, a_1\}$ stehen in der Relation $\varkappa\mathscr{T}$, nicht aber in der Relation $\mathscr{E}_{\mathscr{Z}_p}$. — Es liegt daher nahe, $(JHI_{\mathscr{T}})$ durch Verschärfung von $\mathscr{T}$ zu einer Aussage zu machen, die zu $(JHK_{\mathscr{E}_{\mathscr{Z}_p}, \mathfrak{F}})$ äquivalent ist.

Seien K, L endliche Ultraketten zwischen a, b; zwischen K, L bestehe die Relation $(\varkappa\mathscr{T})_q$, wenn $\varkappa\mathscr{T}$ zwischen ihnen gilt und noch Folgendes erfüllt ist: es gibt $\lhd$-Intervalle $[x_i, y_i]$ $(i=0, \ldots, n)$ von $(E, \leqq)$ mit $[x_0, y_0] \in K^*$, $[x_n, y_n] \in L^*$, $[x_{j-1}, y_{j-1}]$ $(\mathscr{P} \cup \mathscr{P}^{-1})$ $[x_j, y_j]$ $(j=1, \ldots, n)$, $a \lhd\lhd x_i$, $y_i \lhd\lhd b$, $y_{j-1} \lhd y_j$ und $x_{j-1} \lhd\lhd x_j$ im Falle $[x_{j-1}, y_{j-1}]\,\mathscr{P}\,[x_j, y_j]$, $y_j \lhd y_{j-1}$ und $x_j \lhd\lhd x_{j-1}$ im Falle $[x_{j-1}, y_{j-1}]\,\mathscr{P}^{-1}\,[x_j, y_j]$. Weiter bestehe $(\varkappa\mathscr{T})_p$ zwischen K, L, wenn $\varkappa\mathscr{T}$ zwischen ihnen gilt und zu jedem $[x_0, y_0]$ aus K^* und dem wegen $K \varkappa\mathscr{T} L$ in L^* vorhandenen $[x_n, y_n]$ mit $[x_0, y_0]\,\mathscr{T}\,[x_n, y_n]$ sich eine Folge von $[x_i, y_i]$ mit den eben genannten Eigenschaften finden läßt, wobei überdies $x_{j-1} \lhd x_j$ oder $x_j \lhd x_{j-1}$.

Es wird behauptet, daß $(JHK_{\mathscr{E}_{\mathscr{Z}_p}, \mathfrak{F}})$, $(JHK_{(\varkappa\mathscr{T})_q, \mathfrak{F}})$, $(JHK_{(\varkappa\mathscr{T})_p, \mathfrak{F}})$ *untereinander sowie zu* $\gamma_{\mathfrak{F}}\mathscr{Z}^\delta = \mathscr{Z}_p$ *äquivalent seien.* Da trivialerweise aus $(JHK_{\mathscr{E}_{\mathscr{Z}_p}, \mathfrak{F}})$

[9]) Für beschränkt längenendliche Verbände zeigte KOŘINEK [2], [3], Th. 5.1, die Äquivalenz von $(B_2^\vee)$ und $(P_2^{*\vee})$; (JD) vorausgesetzt, wurde dies bereits von KLEIN [2], Th. 14, bewiesen. Ist $(E, \leqq)$ nicht diskret geordnet, so läßt sich die Äquivalenz analog gebildeter Aussagen zu $(B_R^\vee)$ nicht ohne Weiteres behaupten; zwar hätten solche Aussagen für zu R gehöriges $\mathfrak{B}$ immer noch $\mathscr{Z} \cap (\mathfrak{F} \times \mathfrak{B}) = \mathscr{Z}_p$ zur Folge, aber *non* $\mathscr{Z} \cap (\mathfrak{F} \times \mathfrak{B}) \subseteq \mathscr{N}_{\mathfrak{B}}$ *non* $\mathscr{D}$ ließe sich nicht mehr beweisen. Und selbst wenn $(E, \leqq)$ als Multiverband nach oben vorausgesetzt würde, brauchte das dann zu s, t, u, v vorhandene r nicht mehr mit s, t, u die Voraussetzungen der entsprechenden Abschwächungen von $(P_2^\vee)$ zu erfüllen.

stets $(JHK_{(\varkappa\mathscr{T})_p,\mathfrak{F}})$ und daraus auch $(JHK_{(\varkappa\mathscr{T})_q,\mathfrak{F}})$ folgt, da weiter $\gamma_{\mathfrak{F}}\mathscr{Z}^{\delta}=\mathscr{Z}_p$ nach dem in 3.3 und 2.1 Bemerkten sogleich $(JHK_{\delta\mathscr{Z}_p,\mathfrak{F}})$ nach sich zieht, bleibt nur nachzuweisen, daß $(JHK_{(\varkappa\mathscr{T})_q,\mathfrak{F}})$ auch $\gamma_{\mathfrak{F}}\mathscr{Z}^{\delta}=\mathscr{Z}_p$ zur Folge hat[10]). Seien K, L endliche Ultraketten zwischen a, b, $K\neq L$, $d(a,b)\geqq 2$, K *non* $\mathscr{Z}_p$ L; da $(JHK_{(\varkappa\mathscr{T})_q,\mathfrak{F}})$ gewiß (JD) impliziert, kann nicht $d(a,b)=2$ gelten. Man betrachte die wegen $(JHK_{(\varkappa\mathscr{T})_q,\mathfrak{F}})$ vorhandenen Intervalle $[x_i,y_i]$ $(i=0,\ldots,n)$; wegen der Transitivität von $\mathscr{M}_{\mathfrak{F}}$ kann man $n=1$ annehmen. Da im Falle $[x_0,y_0]\mathscr{P}[x_1,y_1]$ gilt $x_0\lhd y_0\lhd y_1$, $x_0\lhd\lhd x_1$, $x_1\lhd y_1$, im Falle $[x_0,y_0]\mathscr{P}^{-1}[x_1,y_1]$ aber $x_1\lhd y_1\lhd y_0$, $x_1\lhd\lhd x_0$, $x_0\lhd y_0$, gibt (JD) auch $x_0\lhd x_1$ oder $x_1\lhd x_0$. Wenn $x_0=a$, so tritt der erste Fall ein; wegen $d(a,b)\geqq 3$ dann $y_0\neq b$, wegen $y_0\lhd y_1$ auch $d(a,y_1)=2$, $y_1\neq b$; man setze $K_1=(K\cap[a,y_0])\cup(L\cap[y_1,b])$. Wenn $x_0\neq a$ und der erste Fall eintritt, so wegen $x_0\lhd y_0\lhd y_1$, $y_1\leqq b$ auch $x_0\neq b$, $x_1\neq b$, $x_1\neq a$; man setze $K_1=(K\cap[a,x_0])\cup(L\cap[x_1,b])$. Entsprechend hat man beim Eintreten des zweiten Falles für $y_0=b$ dann $x_1\neq a$, $x_1\neq b$ und setzt $K_1=(L\cap[a,x_1])\cup(K\cap[x_0,b])$, für $y_0\neq b$ auch $y_1\neq a$, $y_1\neq b$ und $K_1=(L\cap[a,y_1])\cup(K\cap[y_0,b])$. Daher gilt stets $K\mathscr{M}_{\mathfrak{F}}K_1\mathscr{M}_{\mathfrak{F}}L$, also $K\mathscr{N}_{\mathfrak{F}}L$.

4.3. Sei $(E,\leqq)$ eine geordnete Menge; die $\mathscr{T}$-invarianten Intervallfunktionen auf $(E,\leqq)$ heißen auch *perspektiv-invariant*. Ist $(E,\leqq)$ Verband und g eine Bewertung von $(E,\leqq)$ (allgemeiner: $(E,\leqq)$ Multiverband und g eine Bewertung dritter Art von $(E,\leqq)$ im Sinne von Benado [3], Def. 5.1, [5], Def. 2.3.2), so ist φg eine $\mathscr{T}$-invariante Intervallfunktion auf $(E,\leqq)$; ist $(E,\leqq)$ ein nach oben oder unten gerichteter Multiverband und f eine additive, $\mathscr{T}$-invariante Intervallfunktion auf $(E,\leqq)$, so ist wegen $\varphi\psi_a f=f$ auch $\psi_a f$ für jedes a aus E eine Benadosche Bewertung dritter Art von $(E,\leqq)$. Für diesen Schluß kann die Additivität von f nicht entbehrt werden: es gibt Verbände $(E,\leqq)$, $\mathscr{T}$-invariante Intervallfunktionen f auf $(E,\leqq)$ und Elemente a in E so, daß $\chi_a f$ mit $\chi_a f(x)=f(a,a\cup x)-f(x,a\cup x)$ keine Bewertung von $(E,\leqq)$ ist — man definiere über $\{u,a,x,y,v\}$ einen nicht modularen Verband durch $u\leqq a\leqq x\leqq v$, $u\leqq y\leqq v$, setze f für alle nur ein Element enthaltenden Intervalle gleich Null, für alle anderen gleich Eins: $\chi_a f(x)+\chi_a f(y)\neq\chi_a f(x\cup y)+\chi_a f(x\cap y)$ (diese Bemerkung lehrt auch, daß die bei Birkhoff [2], p. 84, Ex. 3, ausgesprochene Behauptung nur dann korrekt ist, wenn von der dort angegebenen Intervallfunktion $w(x,y)$ noch Additivität vorausgesetzt wird).

Die nach 1.3 von der Äquivalenzrelation $\mathscr{T}$ bestimmten Intervallfunktionen über $\lhd\lhd$ werden mit p_ϱ $(\varrho\in\mathsf{P})$ bezeichnet (eingeführt von Birkhoff [2], p. 75, in beschränkt längenendlichen Verbänden und bei Gültigkeit von $(JHI_{\mathscr{T}})$); *ihre Additivität ist dann zu* $(JHI_{\mathscr{T}})$ *äquivalent*. Im Allgemeinen ist keine der Funktionen p_ϱ $\lhd$-treu; das Verhalten der ganzen Schar erlaubt jedoch eine Kennzeichnung gewisser Intervalle: *seien* a, b *aus* E *mit* $a\lhd\lhd b$; *es gilt genau*

[10]) Die Aussage $\gamma_{\mathfrak{F}}\mathscr{Z}^{\delta}=\mathscr{Z}_p$ ist äquivalent zu *non* $\mathscr{Z}_p\cap(\mathfrak{F}\times\mathfrak{F})\subseteq\mathscr{N}_{\mathfrak{F}}\cup$ *non* $\mathscr{D}$; für beschränkt längenendliche Verbände ist die Äquivalenz von $\gamma_{\mathfrak{F}}\mathscr{Z}=\mathscr{Z}_p$ und $(JHK_{(\varkappa\mathscr{T})_q,\mathfrak{F}})$ Inhalt des Theorems 3.3 in Vilhelm [2]. Betrachtet man $\mathfrak{F}$ umfassende Klassen $\mathfrak{B}$ und Sätze $(JHK_{(\varkappa\mathscr{T})_q,\mathfrak{B}})$, also $(JHK_{(\varkappa\mathscr{T})_q,\mathfrak{F}})$ zuzüglich $(FIN_{\mathfrak{B}})$, so kann man die Definition von $(\varkappa\mathscr{T})_q$ mittels Ersetzung von $\lhd\lhd$ durch das zu $\mathfrak{B}$ gehörige R abschwächen.

dann $a=b$, *wenn* $p_\varrho(a,b)=0$ *für alle* ϱ *aus* P; *es gilt genau dann* $a\prec b$, *wenn es ein* ϱ *in* P *gibt mit* $p_\varrho(a,b)=1$ *und alle für* λ *aus* P *mit* $\lambda\neq\varrho$ *gilt* $p_\lambda(a,b)=0$.

In der Tat sind diese Bedingungen für $a\prec b$ sicherlich notwendig. Seien umgekehrt K, L endliche Ultraketten zwischen a, b, $a\neq b$, $x\in K$, $y\in L$, $z\in L$, $a\prec x$, y minimal in L für $x\leqq y$, weiter $z\prec y$. Falls $y=x$, so sind $[a,x]$, $[z,y]$ identisch, andernfalls gilt $x\parallel z$, und $[a,x]$, $[z,y]$ sind projektiv. Ist also μ die $\mathscr{T}$-Klasse von $[a,x]$, so gilt $p_\mu(a,b)\geqq 1$ — wenn $a\neq b$, so kann daher nicht $p_\varrho(a,b)=0$ für alle ϱ aus P gelten. Gilt aber $p_\varrho(a,b)=1$ und $p_\lambda(a,b)=0$ für $\lambda\neq\varrho$, so folgt $\mu=\varrho$. Dual muß für w aus K mit $w\prec b$ auch $[w,b]$ in ϱ liegen — dies aber trifft für jede endliche Ultrakette K zwischen a, b zu, gälte also nicht $a\prec b$, so folgte $p_\varrho(a,b)\geqq 2$. — Setzt man in $(E,\leqq)$ noch (JD) voraus, so ist für die Intervalle $[a,b]$ mit $a\prec\prec b$ eine entsprechende Aussage über die p_ϱ für $d(a,b)=2$ notwendig, für $d(a,b)=3$ (wie auch für $d(a,b)=2$ ohne (JD)) schon nicht mehr. Hinreichend aber ist eine solche Aussage nicht einmal für $d(a,b)=2$: in dem in 4.2 angegebenen Beispiele betrachte man den von a_i $(i=3,5,7,9,10,12,13)$ gebildeten Teilverband, in welchem noch die Beziehung $a_{10}\leqq a_7$ gestrichen wird: es gibt nur drei $\mathscr{T}$-Klassen ϱ, λ, μ, die etwa durch $[a_{13},a_{10}]$, $[a_{13},a_{12}]$, $[a_{10},a_5]$ repräsentiert werden, und es gilt $p_\varrho(a_{13},a_3)=1$, $p_\lambda(a_{13},a_3)=1$, $p_\mu(a_{13},a_3)=0$, $d(a_{13},a_3)=3$.

Diese Beschreibung der $\prec$-Intervalle erlaubt es, die Aussagen $(B_1^\vee)$, $(B_2^\vee)$, $(B_R^\vee)$, $(B_3^\vee)$ mit Hilfe der Funktionen p_ϱ zu formulieren: mit den Bezeichnungen dieser Aussagen gilt nämlich allemal $[u,t]\mathscr{P}[s,r]$. Aus $(B_3^\vee)$ folgt aber bereits $(JHI_{\mathscr{T}})$ und damit die Additivität der p_ϱ. Dieses beachtend, *sieht man* leicht, *daß sich die Aussagen* $(B_1^{*\vee})$, $(B_2^{*\vee})$, $(B_R^{*\vee})$, $(B_3^{*\vee})$ *dadurch verschärfen lassen, daß noch „für alle* ϱ *aus* P: $p_\varrho(s,r)\leqq p_\varrho(u,t)$“, *bei* $(B_2^{*\vee})$, $(B_R^{*\vee})$, $(B_3^{*\vee})$ *auch „für alle* ϱ *aus* P: $p_\varrho(t,r)\leqq p_\varrho(u,s)$“ *mit in die Behauptung aufgenommen werden.* Sei nämlich die Verschärfung etwa von $(B_1^{*\vee})$ schon für alle s',t',u',v' mit $1\leqq d(u',t')<n$ bewiesen und seien die Voraussetzungen von $(B_1^{*\vee})$ für s,t,u,v mit $d(u,t)=n$ erfüllt; dann wähle man t_1 in E mit $u\prec\prec t_1$, $t_1\prec t$, $d(u,t_1)=n-1$, und wende das Bewiesene auf s,t_1,u,v an: man findet r_1 mit $t_1\leqq r_1$, $s\prec\prec r_1$, $r_1\leqq v$, $p_\varrho(s,r_1)\leqq p_\varrho(u,t_1)$ für alle ϱ. Wenn $r_1=t_1$, so sei r gleich t, $p_\varrho(r_1,r)=p_\varrho(t_1,t)$, $p_\varrho(s,r)=p_\varrho(s,r_1)+p_\varrho(r_1,r)\leqq p_\varrho(u,t_1)+p_\varrho(t_1,t)=p_\varrho(u,t)$; wenn $t\leqq r_1$, so sei r gleich r_1, $p_\varrho(s,r)=p_\varrho(s,r_1)\leqq p_\varrho(u,t_1)\leqq p_\varrho(u,t)$; wenn weder $r_1=t_1$ noch $t\leqq r_1$, so wegen $t_1\leqq r_1$ dann $t\parallel r_1$, so daß man durch Anwendung von $(B_1^\vee)$ auf r_1,t,t_1,v ein r mit $t\leqq r$, $r_1\prec r$, $r\leqq v$, $p_\varrho(r_1,r)\leqq p_\varrho(t_1,t)$ für alle ϱ findet, $p_\varrho(s,r)=p_\varrho(s,r_1)+p_\varrho(r_1,r)\leqq p_\varrho(u,t_1)+p_\varrho(t_1,t)=p_\varrho(u,t)$. — Damit erhält man sogleich auch Verschärfungen von $(P_1^{*\vee})$ und $(P_2^{*\vee})$; $(P_1^{*\vee})$ *etwa ist äquivalent zu*

$(P_1^{*\vee},\mathscr{P})$ *für alle* s,t,u,r *aus* E: *für alle* ϱ *aus* P: *aus* $u\prec\prec t$, $[u,t]\mathscr{P}[s,r]$ *folgt* $s\prec\prec r$, $p_\varrho(s,r)\leqq p_\varrho(u,t)$.

Diese Ergebnisse lassen sich, zunächst für einen Spezialfall, noch weiter verbessern. In $(E,\leqq)$ gelte $(B_3^\vee)$ oder $(B_R^\vee)$ oder $(B_2^\vee)$; seien s,t,u,v Elemente, welche der Voraussetzung von $(B_3^{*\vee})$ oder $(B_R^{*\vee})$ oder $(B_2^{*\vee})$ mit $u\prec s$ genügen;

dann kann man r in den entsprechenden Behauptungen so wählen, daß es für jede endliche Ultrakette K zwischen u, t eine endliche Ultrakette L zwischen s, r gibt und, für $M = K \cup \{r\}$, $N = L \cup \{u\}$, eine umkehrbare Abbildung τ von M^* auf N^* mit $\tau[x, y] \mathscr{P}[x, y]$ für $\tau[x, y] = [u, s]$, $[x, y] \mathscr{P} \tau[x, y]$ für $[x, y] \neq [u, s]$; wenn $M \neq K$, so $\tau[t, r] = [u, s]$. Denn das ist für $d(u, t) \leqq 1$ trivial; sei es für alle s', t', u', v' mit $1 \leqq d(u', t') < n$ bewiesen, und seien die genannten Voraussetzungen mit $d(u, t) = n$ erfüllt; man wähle t_1 in K mit $t_1 \lhd t$ und bestimme das nach Induktionsannahme vorhandene r_1 mit der Ultrakette L_1 und der Abbildung τ_1 zwischen M_1^* und N_1^*, $M_1 = (K \cap [u, t_1]) \cup \{r_1\}$, $N_1 = L_1 \cup \{u\}$. Wenn $r_1 = t_1$, so sei r gleich t, L gleich $L_1 \cup \{r\}$, und man setze τ_1 durch $\tau[t_1, t] = [t_1, t]$ zu τ fort; wenn $r_1 = t$, so sei r gleich t, L gleich L_1, τ gleich τ_1; wenn $r_1 \neq t_1$, $r_1 \neq t$, so wegen $d(t_1, r_1) \leqq d(u, s)$ doch $t_1 \lhd r_1$, so daß man durch Anwendung von $(B_3^\vee)$ oder $(B_R^\vee)$ oder $(B_2^\vee)$ auf r_1, t, t_1, v ein r mit $t \lhd r$, $r_1 \lhd r$ finden, L gleich $L_1 \cup \{r\}$ setzen und τ_1 durch $\tau[t_1, t] = [r_1, r]$, $\tau[t, r] = \tau_1[t_1, r_1] = [u, s]$ zu τ fortsetzen kann. — Was aus diesem Sachverhalt wird, wenn statt $u \lhd s$ nur noch $u \lhd\lhd s$ gilt, wird im nächsten Abschnitt bemerkt werden.

4.4. Sei $(E, \leqq)$ eine geordnete Menge; aus $(B_3^\vee)$ folgte $\mathscr{Z} \cap (\mathfrak{F} \times \mathfrak{F}) = \mathscr{Z}_p$, $\mathscr{Z}^\delta = \mathscr{Z}_p$, $\gamma_{\mathfrak{F}} \mathscr{Z}^\delta = \mathscr{Z}_p$; man sieht leicht, daß jede dieser Aussagen eine echte Abschwächung der vorangehenden ist. Es soll nun die letzte von ihnen, also $(JHK_{(\varkappa \mathscr{T})_p, \mathfrak{F}})$, so verschärft werden, daß eine zu $(B_3^\vee)$ äquivalente Aussage entsteht.

Sei $\mathscr{S}$ die *transitive Hülle* von $\mathscr{P}$, also die kleinste $\mathscr{P}$ enthaltende transitive Relation; seien K, L endliche Ultraketten zwischen a, b aus E; zwischen K, L gelte $(\varkappa \mathscr{S}^{-1} \mathscr{S})_p$, wenn es eine umkehrbare Abbildung σ von K^* auf L^* so gibt, daß aus $[x, y] \in K^*$, $[w, z] \in L^*$, $\sigma[x, y] = [w, z]$ die Existenz eines Intervalles $[m, n]$ folgt mit $[x, y] \mathscr{S} [m, n]$, $[w, z] \mathscr{S} [m, n]$, $m \lhd\lhd n$, $x \lhd\lhd m$, $w \lhd\lhd m$, $n \lhd\lhd b$. *Dann ist $(B_3^\vee)$ äquivalent zu $(JKH_{(\varkappa \mathscr{S}^{-1} \mathscr{S})_p, \mathfrak{F}})$* [11]).

Zunächst ist $(B_3^\vee)$ eine Folge von $(JHK_{(\varkappa \mathscr{S}^{-1} \mathscr{S})_p, \mathfrak{F}})$. Denn sind s, t, u, v Elemente von E mit $s \| t$, $u \lhd s$, $u \lhd t$, $s \lhd\lhd v$, $t \lhd\lhd v$, so ist $d(s, v)$ eine natürliche Zahl, und man wähle r in E mit $s \lhd\lhd r$, $t \lhd\lhd r$, $r \lhd\lhd v$ und minimalem $d(s, r)$. Da jedenfalls (JD) aus $(JHK_{(\varkappa \mathscr{S}^{-1} \mathscr{S})_p, \mathfrak{F}})$ folgt, sind $s \lhd r$ und $t \lhd r$ äquivalent. Wären diese Beziehungen aber nicht erfüllt, so gäbe es endliche Ultraketten K, L zwischen u, r mit $s \in K$, $t \in L$; Anwendung von $(JHK_{(\varkappa \mathscr{S}^{-1} \mathscr{S})_p, \mathfrak{F}})$ lieferte Intervalle $[x, y]$, $[w, z]$ aus K^*, L^* mit $s \lhd\lhd x$, $t \lhd\lhd w$ und $\sigma[x, y] = [w, z]$. Für das zugehörige Intervall $[m, n]$ würde $s \lhd\lhd x \lhd\lhd m$, $t \lhd\lhd w \lhd\lhd m$ $m \lhd\lhd n \lhd\lhd r$; da aus $x \neq y$ und $[x, y] \mathscr{S} [m, n]$ aber $m \neq n$ folgt, gälte wegen (JD) dann $d(s, m) < d(s, n) \leqq d(s, r)$: Widerspruch zur Minimalität von $d(s, r)$

[11]) Für beschränkt längenendliche geordnete Mengen bewies dies Benado [3], Th. 4.7, für beschränkt längenendliche Verbände Kořinek [2], [3], [4], Th. 4.4; Kořineks Lemma 3.2 ist ein Spezialfall der am Ende von 4.3 angegebenen Verschärfung von $(B_2^{*\vee})$. Kořinek konnte unter seinen Voraussetzungen überdies zeigen, daß die Abbildung σ dann eindeutig bestimmt ist. — In Verbänden gilt $\mathscr{S} = \mathscr{P}$; in beschränkt längenendlich geordneten Mengen wurden diese Relationen von Benado l.c., in beschränkt längenendlichen Verbänden von Kořinek l.c. eingeführt. Da $(\varkappa \mathscr{S}^{-1} \mathscr{S})_p$ keine Äquivalenzrelation ist, lassen sich die Reduktionsverfahren aus 2.1 hier nicht anwenden.

(oder: wegen (JD) ist $(E, \lhd\lhd)$ beschränkt längenendlich, also Multiverband, so daß man r als minimale obere Schranke in $(E, \lhd\lhd)$ von $\{s, t\}$ unter v wählen kann ...).

Sei umgekehrt $(B_3^{\vee})$ erfüllt; dann gilt in $(E, \lhd\lhd)$ auch $(B_2^{\vee})$, und da aus $(B_3^{\vee})$ stets (JD) folgt, ist $(E, \lhd\lhd)$ beschränkt längenendlich, also Multiverband. Der Satz von BENADO (man vgl.[11]) liefert dann die Gültigkeit von $(JHK_{(\varkappa\mathscr{S}^{-1}\mathscr{S})_p, \mathfrak{V}})$ in $(E, \lhd\lhd)$, erst recht also in $(E, \leqq)$. Es sei erlaubt, den Beweis noch einmal explizite, ohne Rückgriff auf das Benadosche Ergebnis, darzustellen. Es ist also für alle a, b aus E mit $a \lhd\lhd b$ und alle endlichen Ultraketten K, L zwischen a, b dann $K(\varkappa\mathscr{S}^{-1}\mathscr{S})_p L$ nachzuweisen. Dies ist im Falle $d(a, b) \leqq 1$ trivial; sei es für alle a', b' mit $1 \leqq d(a', b') < n$ bewiesen und sei $d(a, b) = n$, seien K, L endliche Ultraketten zwischen a, b, und L habe die Länge n. Man wähle s in L mit $a \lhd s$ und t in K mit $t \lhd b$; wendet man die am Ende von 4.3 angegebene Verschärfung von $(B_3^{*\vee})$ auf s, t, a, b und K' mit $K' = K \cap [a, t]$ an, so findet man, wie dort beschrieben, r in E, eine endliche Ultrakette L' zwischen s, r und eine Abbildung τ von $(K' \cup \{r\})^*$ auf $(L' \cup \{a\})^*$, wegen $t \lhd b$ kann nur $r = t$ oder $r = b$ gelten. Wegen $s \in L$ gilt $d(s, b) = n - 1$, so daß man $(JHK_{(\varkappa\mathscr{S}^{-1}\mathscr{S})_p, \mathfrak{V}})$ auf die Ketten $L' \cup \{b\}$ und $L \cap [s, b]$ anwenden kann und eine zugehörige Abbildung σ_1 findet. Falls $r = t$, so setze man $\sigma[t, b] = \sigma_1[t, b]$, $\sigma[x, y] = \tau[x, y]$ für $\tau[x, y] = [a, s]$ und $[x, y] \in K'^*$, $\sigma[x, y] = \sigma_1\tau[x, y]$ für alle übrigen $[x, y]$ aus K'^*; falls $r = b$, so setze man $\sigma[t, b] = \tau[t, b] = [a, s]$, $\sigma[x, y] = \sigma_1\tau[x, y]$ für alle $[x, y]$ aus K'^*; diese Abbildung leistet das Gewünschte. — Es ist klar, daß man zu $(B_R^{\vee})$ äquivalente Aussagen erhält, wenn man $(JHK_{(\varkappa\mathscr{S}^{-1}\mathscr{S})_p, \mathfrak{V}})$ durch $(FIN_{\mathfrak{B}})$ für die R definierenden Klassen $\mathfrak{B}$ verschärft. Weiter ist nun die am Schluß von 4.3 aufgeworfene Frage zu beantworten, was sich statt der dort angegebenen Verschärfungen von $(B_3^{*\vee})$, $(B_R^{*\vee})$, $(B_2^{*\vee})$ noch im Falle $u \lhd\lhd s$ behaupten lasse: genügen s, t, u, v den Voraussetzungen einer dieser Aussagen und gilt das zugehörige $(B_3^{\vee})$, $(B_R^{\vee})$, $(B_2^{\vee})$, so kann man r in den entsprechenden Behauptungen so wählen, daß es für jede endliche Ultrakette K zwischen u, t eine endliche Ultrakette L zwischen s, r so gibt, daß für $M = K \cup \{r\}$, $N = L \cup \{u\}$ die Abbildung σ von $(\varkappa\mathscr{S}^{-1}\mathscr{S})_p$ dann M^* umkehrbar auf N^* abbildet.

5. Modular geordnete Mengen. 5.0. Ein Verband ist bekanntlich genau dann ein modularer Verband, wenn er keinen nicht modularen, aus fünf Elementen bestehenden Teilverband enthält; ein solcher Teilverband eines Verbandes $(E, \leqq)$ läßt sich darstellen als von den Komponenten einer Zelle gebildet, welche kein Viereck ist — vereinigt man umgekehrt die Komponenten einer Zelle in $(E, \leqq)$, welche kein Viereck ist, so enthält der entstehende Teilverband von $(E, \leqq)$ auch einen nicht modularen, aus fünf Elementen bestehenden Teilverband von $(E, \leqq)$.

5.1. Eine geordnete Menge $(E, \leqq)$ heiße *modular geordnet*, wenn jede Zelle in $(E, \leqq)$ ein Viereck ist — also genau dann, wenn es keine fünf Elemente in E gibt, die in ihrer konvexen Hülle, geordnet durch die Spur von $\leqq$, einen

nicht modularen Teilverband bilden. Dann sind die Verbände unter den modular geordneten Mengen genau die modularen Verbände; ebenfalls stimmen die Multiverbände unter den modular geordneten Mengen mit den im Benadoschen Sinne modularen Multiverbänden überein (BENADO [3], Cor. 4.41; definiert wird Modularität von Multiverbänden dort durch die Möglichkeit, perspektive Intervalle auf bestimmte Art ineinander abzubilden. — In dem nach Fertigstellung dieser Arbeit erschienenen Aufsatz BENADO [5] wird übrigens Modularität von Multiverbänden gerade durch die Aussage des erwähnten Cor. 4.41 erklärt, also dem Sinne nach in der gleichen Art wie hier: Def. 2.2). Insbesondere gilt in modular geordneten Mengen $\mathscr{Z} = \mathscr{Z}_p$, so daß $(JHK_{\mathscr{E}\mathscr{Z}_p, \mathfrak{A}})$, $(JHK_{(\varkappa\mathscr{T})_p, \mathfrak{A}})$ in Kraft sind, erst recht also $(FIN_{\mathfrak{A}})$ und (JD), wobei allerdings wegen 2.4 das Auswahlaxiom herangezogen werden muß. Für Verbände erhält man daraus noch die Dedekindsche Kennzeichnung der Modularität: ein Verband ist genau dann modular, wenn in jedem seiner Teilverbände (JD) gilt (DEDEKIND [1], § 6, Th. X) — einerseits ist nämlich im nicht modularen, aus fünf Elementen bestehenden Verband (JD) nicht erfüllt, andererseits ist jede Zelle in einem Teilverband von $(E, \leqq)$ auch Zelle in $(E, \leqq)$ selbst, so daß mit einem Verbande $(E, \leqq)$ auch jeder Teilverband modular ist.

Ist $(E, \leqq)$ modular geordnet, so gilt $(B_3^{\vee})$ und jedes $(B_K^{\vee})$; ist $(E, \leqq)$ außerdem Multiverband nach oben, so gilt auch $(B_1^{\vee})$ und $(B_2^{\vee})$. Erfüllen nämlich s, t, u, v die Voraussetzungen einer dieser Aussagen, so verschafft man sich ein minimales Element r, $r \leqq v$, unter den oberen Schranken von $\{s, t\}$: im Falle $(B_1^{\vee})$ oder $(B_2^{\vee})$ wird dies durch die Voraussetzung des Multiverbandes nach oben gesichert; in den anderen Fällen gilt $u \lhd\lhd v$, wegen der Modularität aber $(FIN_{\mathfrak{A}})$, so daß auch alle Ultraketten zwischen s, v und zwischen t, v endlich sind und man außerdem $t \lhd\lhd r$, $r \lhd\lhd v$ hat. Es bleibt $s \lhd r$ nachzuweisen. Liegt aber r_1 zwischen s, r, $r_1 \neq s$, so ist r auch minimales Element unter den oberen Schranken von $\{r_1, t\}$; wegen $u \lhd t$ kann u nur dann nicht auch maximales Element unter den unteren Schranken von $\{r_1, t\}$ sein, wenn r_1, t vergleichbar sind, also $r_1 = r$. Aus $r_1 \neq r$ folgte daher, daß die Ketten $\{u, t, r\}$, $\{u, s, r_1, r\}$ Komponenten einer Zelle wären, die kein Viereck sein könnte (auf $(B_3^{\vee})$ und $(B_K^{\vee})$ kann man auch so schließen: wegen $\mathscr{Z} = \mathscr{Z}_p$ gilt erst recht $\mathscr{Z}^{\delta} = \mathscr{Z}_p$; würden s, t, u, v, x, y, z die Aussage (A_7) falsifizieren, so wäre $(\{u, s, x, v\}, \{u, t, v\})$ eine Zelle — daher gilt $(B_3^{\vee})$, und wegen $(FIN_{\mathfrak{A}})$ dann auch $(B_K^{\vee})$). — Da die Modularität definierende Eigenschaft bei dem Übergang zur inversen Ordnung ungeändert bleibt, gilt in modular geordneten Mengen auch $(B_3^{\wedge})$ und $(B_K^{\wedge})$, in modularen Multiverbänden nach unten auch $(B_1^{\wedge})$ und $(B_2^{\wedge})$.

5.2. Sei $(E, \leqq)$ eine geordnete Menge; eine Intervallfunktion f auf $(E, \leqq)$ heiße *streng monoton*, wenn für alle Intervalle $[x, y]$, $[w, z]$ von $(E, \leqq)$ aus $[x, y] \leqq [w, z]$, $[x, y] \neq [w, z]$ folgt $f(x, y) \neq f(w, z)$; ist $(E, \leqq)$ Multiverband, f streng monoton, $\mathscr{T}$-invariant, und sind die Werte von f nicht-negative Elemente eines total geordneten Moduls G, so ist $\psi_a f$ für jedes a aus E eine

positive Bewertung von $(E, \leqq)$ (im Sinne von BENADO [3], Def. 5.12, [5], Def. 2.3.3).

Sei $(E, \leqq)$ diskret geordnet; dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(M_0) *$(E, \leqq)$ ist modular geordnet*

(M_1) *es gilt $(B_1^\vee)$ und $(B_1^\wedge)$*

(M_2) *die Kořinecksche Intervallfunktion d ist $\mathscr{T}$-invariant*

(M_3) *jede der Intervallfunktionen p_ϱ ist $\mathscr{T}$-invariant*

(M_4) *es existiert auf $(E, \leqq)$ eine streng monotone, $\mathscr{T}$-invariante Intervallfunktion f*

(M_5) *es existiert auf $(E, \leqq)$ eine umkehrbar $\lhd$-treue, $\mathscr{T}$-invariante Intervallfunktion f*

(M_6) *ist von zwei in der gleichen $\mathscr{T}$-Äquivalenzklasse gelegenen Intervallen von $(E, \leqq)$ eines in dem anderen enthalten, so sind sie gleich*

(M_7) *eine $\mathscr{T}$-Äquivalenzklasse, welche ein $\lhd$-Intervall enthält, enthält nur $\lhd$-Intervalle*

(M_8) *es gibt keine Kette $\{u, a, b, v\}$ in $(E, \leqq)$ mit $u \lhd a$, die Komponente einer Zelle ist.*

In jedem dieser Fälle ist $(E, \leqq)$ beschränkt längenendlich; ist $(E, \leqq)$ sogar ein diskreter Verband, so ist (M_8) äquivalent zu

(M_9) *für alle a, b, c aus E: wenn $a \frown c \lhd a$, $a \leqq b$, $a \frown c = b \frown c$, $a \smile c = b \smile c$, so $a = b$;*

ist $(E, \leqq)$ sogar ein endlich-dimensionierter Verband, so ist (M_2) äquivalent zu

(M_{10}) *es gilt (JD) und für alle x, y aus E: $e(x) + e(y) = e(x \smile y) + e(x \frown y)$.*[12])

Aus (M_0) folgt nämlich (JD), so daß $(E, \leqq)$ Multiverband ist und (M_0) zu (M_1) führt; aus (M_1) folgt $(P_1^{*\vee})$, $(P_1^{*\wedge})$ und daher (M_2); aus der Äquivalenz von $(B_1^\vee)$, $(P_1^{*\vee})$, $(P_1^{*\vee}, \mathscr{P})$ folgt die Äquivalenz von (M_2) und (M_3); aus (M_2) folgt über $(P_1^{*\vee})$, $(B_1^\vee)$ auch (JD), also (M_4) mit f gleich d; aus (M_4) folgt (M_6); die Äquivalenz von (M_2) und (M_{10}) unter den genannten Voraussetzungen ist klar. Aus (M_6) folgt (M_0), denn wäre $\{u, a, b, v\}$ Komponente einer Zelle, so gälte $[a, v] \mathscr{T} [b, v]$. Aus ($M_2$) folgt weiter ($M_5$) und daraus ($M_7$); aus ($M_7$) folgt ($M_8$); die Äquivalenz von ($M_8$) und ($M_9$) unter den genannten Voraussetzungen ist klar. Aus (M_8) folgt $(P_2^\vee)$, denn erfüllen s, t, u, r die Voraussetzungen von $(P_2^\vee)$ und gälte nicht $s \lhd r$, so wählte man r_1 mit $s \leqq r_1 \leqq r$,

[12]) Für beschränkt längenendlich geordnete Mengen findet sich die Äquivalenz von (M_0), (M_1) bei BENADO [3], Th. 4.74; für beschränkt längenendliche Verbände die Äquivalenz von (M_0), (M_1), (M_2) bei KOŘINEK [2], [3], Th. 5.2; für beschränkt längenendliche Verbände die Äquivalenz von (M_0), (M_1) bei KLEIN [2], Th. 27; für endliche Verbände die Äquivalenz von (M_0), (M_1), (M_{10}) bereits bei BIRKHOFF [1], Th. 10.2. In BIRKHOFFs Th. 10.1 läßt die Beweisanordnung den ohne Endlichkeitsvoraussetzungen gültigen Schluß von (M_4) auf (M_0) erkennen — allerdings wird meist in (M_4) noch Additivität von f vorausgesetzt und die Aussage dann für Bewertungen formuliert: BENADO [3], Th. 5.5, Th. 5.51.

$r_1 \neq s$, $r_1 \neq r$, wegen $u \lhd t$ wäre u maximale untere Schranke von $\{t, r_1\}$, so daß $\{u, s, r_1, r\}$ Komponente einer Zelle wäre; aus (M_8) folgt auch $(P_2^\wedge)$, denn erfüllen s, t, u, r die Voraussetzungen von $(P_2^\wedge)$ und gälte nicht $r \lhd s$, so wählte man r_1 mit $r \lhd r_1$, $r_1 \leqq s$, $r_1 \neq s$, wegen $t \lhd u$ wäre u minimale obere Schranke von $\{t, r_1\}$, so daß $\{r, r_1, s, u\}$ Komponente einer Zelle wäre; wegen der Äquivalenz von $(P_2^\vee)$, $(B_2^\vee)$, $(B_1^\vee)$ folgt daher aus (M_8) auch (M_1).

Der Schluß von (M_4) auf (M_6) und (M_0) gilt in beliebigen geordneten Mengen; allgemein kann man jedoch nur die Modularität von $(E, \lhd\lhd)$ in entsprechender Weise beschreiben. Da (M_0) bei dem Übergang zur inversen Ordnung ungeändert bleibt, ist (M_0) auch äquivalent zu derjenigen Aussage, die aus (M_8) bei Ersetzung von $u \lhd a$ durch $b \lhd v$ entsteht. Wegen (M_3) liefern genau in modularen, diskret geordneten Mengen die Funktionen p_e ein Erzeugendensystem des Moduls der additiven, $\mathcal{T}$-invarinaten Intervallfunktionen auf $(E, \leqq)$ mit Werten in einem Oberring der ganzen Zahlen.

Daß (M_0) aus (M_8) folgt, läßt sich auch ohne Verwendung früherer Sätze zeigen; allerdings muß $(E, \leqq)$ dazu als diskreter Multiverband nach oben vorausgesetzt werden — ist dann nämlich $(E, \leqq)$ nicht modular geordnet, so gilt auch (M_8) nicht. Denn allgemein findet man: ist $\{t, y, z, w\}$ Komponente einer Zelle, $d(t, y) \geqq 2$, so existiert eine Kette $\{u, a, b, v\}$, die Komponente einer Zelle ist, mit $d(u, a) < d(t, y)$. Zum Beweis sei x aus einer Ultrakette kürzester Länge zwischen t, y und $t \leqq x$, $x \lhd y$, und sei K eine Kette so, daß $(\{t, y, z, w\}, K)$ eine Zelle ist; ist dann $(\{t, x, y, w\}, K)$ eine Zelle, so wähle man t, x, y, w für u, a, b, v. Andernfalls ist t noch immer maximale untere Schranke von $\{x, s\}$ für alle s aus K mit $s \neq w$; es gibt also s, r mit s in K, $s \neq t$, $s \neq w$, r in E, $r \leqq w$, $r \neq w$, r minimale obere Schranke von $\{x, s\}$. Ist dann $(\{x, y, z, w\}, \{x, r, w\})$ eine Zelle, so wähle man x, y, z, w für u, a, b, v; andernfalls ist wegen $s \leqq w$ immer noch w minimale obere Schranke von $\{r, y\}$ wie von $\{r, z\}$, wegen $x \lhd y$ auch x maximale untere Schranke von $\{r, y\}$; es gibt also q in E mit $x \leqq q$, $x \neq q$, q untere Schranke von $\{r, z\}$. Da r minimale obere Schranke von $\{x, s\}$, so auch r minimale obere Schranke von $\{q, s\}$; da $q \leqq z$, so auch t maximale untere Schranke von $\{q, s\}$. Daher ist $(\{t, x, q, r\}, \{t, s, r\})$ eine Zelle, und man kann t, x, q, r für u, a, b, v wählen.

6. Anwendungen in der Gruppentheorie. Sei g eine Gruppe, $\leqq$ die Inklusion zwischen Untergruppen von g; sind a, b Untergruppen von g, so heißt *a nachinvariant* in b: $a \leqq b$, wenn Untergruppen n_i von g $(i = 0, \ldots, k)$ so existieren, daß $n_0 = a$, $n_k = b$, n_{j-1} Normalteiler in n_j $(j = 1, \ldots, k)$ ist (der Name nachinvariant nach WIELANDT [1]; dort wird jedoch mit $\lhd$ das Normalteiler-Sein und daher die Nachinvarianz, dessen transitive Hülle, mit $\lhd\lhd$ beschrieben). Die Menge E aller a mit $a \leqq g$ wird durch $\leqq$ geordnet, und durch Induktion sieht man, daß für a in E und eine Untergruppe b von g stets $a \cap b \leqq b$ gilt: $(E, \leqq)$ ist Halbverband nach unten, Infimum von $\{a, b\}$ gleich dem Mengendurchschnitt $a \cap b$, und auf E fallen $\leqq$ und $\leqq$ zusammen. Mit $\lhd$ als Nachbarschaftsrelation von $\leqq$ gilt $a \lhd b$ genau dann, wenn a maximaler Normalteiler in b ist. Sind a, c, d Untergruppen von b, a normal in b, c normal

in d, so ist ac normal in ad; Induktion zeigt, daß man bei Ersetzung von c normal in d durch $c \leqq d$ auch $ac \leqq ad$ behaupten kann. Liegen s, t, u, v in E, $s \| t$, $v \leqq s$, $v \leqq t$, $s \leqq u$, $t \lhd u$, so folgt $ts \leqq tu$, $tu = u$, $t \leqq ts \leqq u$, wegen $t \lhd u$ und $s \| t$ aber $ts = u$, $t \lhd ts$; da nach dem ersten Isomorphiesatz ts/t isomorph $s/s \cap t$, gilt $s \cap t \lhd s$ (WIELANDT [1], Hilfssatz (5)); da noch $v \leqq s \cap t$, gilt $(B_1^{\wedge})$ in $(E, \leqq)$.

Bezeichnet e die nur aus dem Einslement bestehende Untergruppe von g, so liegt e in E; unter den endlichen Ketten zwischen e, g in $(E, \leqq)$ befinden sich jedenfalls die Normalreihen von g, und die endlichen Ultraketten zwischen e, g in $(E, \leqq)$ sind genau die Kompositionsreihen von g. $(B_1^{\wedge})$ hat nun $(JHK_{\mathfrak{E}_{\mathfrak{Z}_p}, \mathfrak{A}})$ zur Folge, also $(JHI_{\mathfrak{F}})$, $(FIN_{\mathfrak{A}})$ und (KON). Aus $(JHI_{\mathfrak{F}})$ folgt unmittelbar der Jordan-Höldersche Satz über die Kompositionsreihen von g. Aus (KON) folgen sofort

(G_1) *besitzt g eine Kompositionsreihe, so auch jede nachinvariante Untergruppe von g*

(G_2) *besitzt g eine Kompositionsreihe, so läßt sich jede Normalreihe von g zu einer Kompositionsreihe verfeinern.*

Aus $(FIN_{\mathfrak{A}})$ folgt weiter, daß $(E, \leqq)$ genau dann beschränkt längenendlich ist, wenn g eine Kompositionsreihe besitzt; wegen des Vorhandenseins von größtem und kleinstem Element in $(E, \leqq)$ läßt sich dies auch durch die Konjunktion der sog. aufsteigenden und absteigenden Kettenbedingungen in $(E, \leqq)$ ausdrücken. Einerseits stimmen auf E die Relationen $\leqq$ und $\subseteqq$ überein, so daß

(G_3) *g besitzt genau dann eine Kompositionsreihe, wenn jede aufsteigende und jede absteigende $\subseteqq$-Kette nachinvarianter Untergruppen von g abbricht,*

andererseits ist jede Kette in $(E, \leqq)$ enthalten in einer Normalkette, nämlich einer $\subseteqq$-Kette nachinvarianter Untergruppen, bei der benachbarte Elemente normal ineinander liegen, weshalb

(G_4) *g besitzt genau dann eine Kompositionsreihe, wenn jede von e aufsteigende und jede von g absteigende Normalkette abbricht.*

In einem gewissen, an diesem Orte nicht näher zu präzisierenden Sinne (man vgl. etwa BOURBAKI [1], p. 24 unten) kann man nun sagen, daß damit (G_1) bis (G_4) aus Sätzen der Ordnungstheorie spezialisiert seien. Früher pflegte man sie als Folgerungen des Schreierschen Verfeinerungstheorems abzuleiten; von diesem aber ist bekannt, daß es nicht in solchem Sinne aus Sätzen der Verbandstheorie, angewandt auf den Verband aller Untergruppen von g, spezialisiert werden kann[13]). Es ist ferner auch bekannt, daß die Menge E

[13]) KUROSCH [1], p. 308; für (G_1) bis (G_4) vergleiche man KUROSCH [1], 113–115, ZASSENHAUS [1], 59–60. Die abstrakten Theorien, aus deren Sätzen sich das Verfeinerungstheorem spezialisieren läßt, verteilen sich auf drei Typen: *a*) in einem Verbande wird axiomatisch noch eine Normalitätsrelation eingeführt: UZKOV [1] (ähnlich ZASSENHAUS [1], p. 76), daran anknüpfend zahlreiche Untersuchungen, u.a. von KOŘINEK [1], BENADO [1], PETRESCO [1]; *b*) es wird eine Menge mit einer nicht-transitiven Relation zu Grunde gelegt: GEORGE [1]; *c*) es wird neben den Verbandsoperationen noch eine nicht-kommutative Multiplikation vorausgesetzt: LORENZEN [1]; dieses dritte Verfahren läßt sich auf Kategorien übertragen.

der nachinvarianten Untergruppen von g im Allgemeinen nicht das Erzeugnis zweier ihrer Elemente enthält[14]), und da sowohl bei dem induktiven Schreierschen wie bei dem konstruktiven Zassenhausschen Beweis des Verfeinerungstheorems die Erzeugnisse gewisser Paare von Untergruppen betrachtet werden, kann man das Verfeinerungstheorem mit seien bisher bekannten Beweisen auch nicht aus Sätzen von Theorien spezialisieren, die auf die geordnete Menge $(E, \leqq)$ der nachinvarianten Untergruppen von g angewandt werden. Sollen daher Sätze wie (G_1) bis (G_4) nicht über das Schreiersche Verfeinerungstheorem begründet werden, so läßt sich die Abstraktion von Verbänden zu geordneten Mengen nicht umgehen. Das unterstreicht noch einmal die Bedeutung, welche dieser Abstraktion auch hier zukommt.

Literatur

Benado, M.: [1] Teoria abstractă a relaţiilor de normalitate. Studii şi cercetări matemat. **4**, 69—120 (1953).

— [2] Asupra unei generalizări a noţiunii de structură. Acad. R.P.R. Bulet. Ştiinţ. Secţ. Mat. Fiz. **5**, No. 1, 41—48 (1953).

— [3] Les ensembles partiellement ordonnés et le théorème de raffinement de Schreier. II. Théorie des multistructures. Čehoslov. Mat. Žur. **5**, 308—344 (1955).

— [4] Bemerkungen zu einer Arbeit von Oystein Ore. Rev. Math. Pur. Appl. **1**, No. 2, 5—12 (1956).

— [5] Bemerkungen zur Theorie der Vielverbände. Math. Nachr. **20**, 1—20 (1959).

Birkhoff, G.: [1] On the combination of subalgebras. Proc. Camb. Phil. Soc. **29**, 441—464 (1933).

— [2] Lattice theory, rev. ed. New York 1948.

Bourbaki, N.: [1] Théorie des ensembles, chap. I/II. Paris 1954.

Croisot, R.: [1] Contribution à l'étude des treillis semimodulaires de longueur infinie. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **68**, 203—265 (1951).

Dedekind, R.: [1] Über die von drei Moduln erzeugte Dualgruppe. Math. Ann. **53**, 371—403 (1900).

Felscher, W., u. J. Schmidt: [1] Natürliche Zahlen, Ordnung, Nachfolge. Arch. Math. Logik Grundlagenforsch. **4**, 81—94 (1959).

George, E.: [1] Über den Satz von Jordan-Hölder-Schreier. J. reine angew. Math. **180**, 110—120 (1939).

Hausdorff, F.: [1] Grundzüge der Mengenlehre. Leipzig 1914.

Hermes, H.: [1] Einführung in die Verbandstheorie. Berlin 1955.

Hölder, O.: [1] Zurückführung einer beliebigen algebraischen Gleichung auf eine Kette von Gleichungen. Math. Ann. **34**, 26—56 (1889).

Jordan, C.: [1] Traité des substitutions et des équations algébriques. Paris 1870.

Klein, F.: [1] Über ausgeglichene Verbände. Math. Ann. **112**, 411—418 (1936).

— [2] Birkhoffsche und harmonische Verbände. Math. Z. **42**, 58—81 (1936).

— [3] Theorie der Gewebe. Math. Z. **45**, 107—126 (1939).

— [4] Zur Axiomatik der ausgeglichenen Gewebe. Math. Z. **53**, 70—75 (1950).

[14]) Zassenhaus [1], p. 236. Wielandt [1], Satz (7), hat gezeigt, daß E dann das Erzeugnis zweier seiner Elemente enthält, wenn g eine Kompositionsreihe besitzt oder wenn $(E, \leqq)$ aufsteigend längenendlich ist. Während man im ersten Falle beim Beweis mit der Wielandtschen Funktion j operiert, dabei (G_2) verwendet und so wieder vom Verfeinerungstheorem abhängig ist, benutzt man im zweiten Falle — man vergleiche etwa Zassenhaus [1], p. 194 —, bei dem die Wielandtsche Funktion m auftritt, keinen der Sätze (G_1) bis (G_4).

KOLIBIAR, M.: [*1*] Bemerkung über Ketten in teilweise geordneten Mengen. Acta Fac. Rer. Nat. Univ. Comenianae Math. **3**, no. 1, 17—22 (1958).
KOŘINEK, V.: [*1*] Der Schreiersche Satz und das Zassenhaussche Verfahren in Verbänden. Věstnik Kral. Česke Spol. Nauk, Třida mat.-přirod. **1941**, No. 14, 29 pp.
— [*2*] Svazy, v nichž platí obecně věta Jordan-Hölderova. Třídy České Akad., Rozpravy II **59**, No. 23, 32 pp. (1950).
— [*3*] Lattices in which the theorem of Jordan-Hölder is generally true. Acad. Tcheque Sci. Bull. Internat. Cl. Sci. Math. **50**, 307—324 (1949).
— [*4*] Le théorème de Jordan-Hölder dans les treillis. Colloques Internat. C.N.R.S. No. 24, 155—158, Paris 1950.
KUROSCH, A.: [*1*] Gruppentheorie. Berlin 1953.
LORENZEN, P.: [*1*] Über die Korrespondenzen einer Struktur. Math. Z. **60**, 61—64 (1954).
MACLANE, S.: [*1*] A conjecture of Ore on chains in partially ordered sets. Bull. Am. Math. Soc. **49**, 567—568 (1943).
ORE, O.: [*1*] On chains in partially ordered sets. Bull. Am. Math. Soc. **49**, 558—566 (1943).
PETRESCO, J.: [*1*] Théorie relative des chaines. Publ. Sci. Univ. Alger, Sér. A **2**, 61—135 (1955).
SZAS, G.: [*1*] On the structure of semi-modular lattices of infinite length. Acta Sci. Math. Szeged **14**, 239—245 (1951/52).
UZKOV, A. I.: [*1*] Über den Satz von Jordan-Hölder [Russ.]. Mat. Sbornik, N.S. **4**, 31—43 (1938).
VILHELM, V.: [*1*] Theorem of Jordan-Hölder in lattices without finite chain condition [Russ.]. Čehoslov. Mat. Žur. **4**, (79) 29—50 (1954).
— [*2*] The selfdual kernel of Birkhoff's condition in lattices [Russ.]. Čehoslov. Mat. Žur. **5**, (80), 439—449 (1955).
WIELANDT, H.: [*1*] Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen. Math. Z. **45**, 209—244 (1939).
ZASSENHAUS, H.: [*1*] The Theory of Groups, 2nd ed. New York 1958.

Freiburg i. Br., Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 1. März 1960)

Die Entstehung der exakten Wissenschaften

Von Paul Lorenzen,

o. Professor für Philosophie an der Universität Kiel

(Verständliche Wissenschaft, Geisteswissenschaftliche Abteilung, herausgegeben von Professor D. Dr. H. Frhr. von Campenhausen, Heidelberg.

Zweiundsiebzigster Band)

Mit 70 Abbildungen. V, 163 Seiten Kl.-8°.

Ganzleinen DM 8,80

INHALTSVERZEICHNIS

Einleitung · Vorbereitende Betrachtungen: Über den Sinn von Wissenschaftsgeschichte. Über den Begriff „exakte Wissenschaften" · Der alte Orient: Vorgeschichtliche Wissenschaft. Ägypten. Mesopotamien · Exakte Wissenschaften in der klassischen Antike: In der vorattischen Zeit: Die Anfänge der griechischen Wissenschaft. Geometrie. Arithmetik. Musiktheorie. Astronomie · In der attischen und hellinistischen Zeit: Astronomie. Mathematik. Logik. Mechanik · Entstehung der neuzeitlichen Wissenschaft: Physik · Mathematik. Logik und Wahrscheinlichkeitstheorie · Literatur- und Namenverzeichnis.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Quasikonforme Abbildungen

Von Hans P. Künzi, Professor an der Universität Zürich und
Privatdozent an der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich

(Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Neue Folge. Heft 26.
Reihe: Moderne Funktionentheorie. Besorgt von L. V. Ahlfors)
Mit 35 Abbildungen. VIII, 182 Seiten Gr.-8°. 1960. DM 39,—

ZUR INFORMATION

Das Gebiet der quasikonformen Abbildungen gehört innerhalb der komplexen Analysis heute zu den modernsten Zweigen des mathematischen Schaffens. Diese neue Theorie überschreitet den Rahmen der analytischen Funktionen, indem eine eindeutige Abbildung (auch auf Riemannsche Flächen) $z \leftrightarrow w$ zugrunde gelegt wird, welche bis auf isolierte Punkte in beiden Richtungen stetig differenzierbar sein soll oder einer gewissen Modulbedingung im Kleinen genügen muß, die ihrerseits die Differenzierbarkeit bewirkt. Dabei wird $|dw/dz|$ im allgemeinen richtungsabhängig und als Dilatationsquotient bezeichnet man den Grenzwert des Achsenverhältnisses der Bildellipse eines infinitesimalen Kreises. Die Entwicklung hat sich auf zahlreiche Gebiete innerhalb der Funktionstheorie fruchtbar ausgewirkt, so speziell bei Untersuchungen über konforme Invarianten bei quasikonformen Abbildungen. Dazu werden Abbildungen gesucht, die sich unter gewissen Nebenbedingungen möglichst wenig von der Konformität entfernen. Weiter treten auch gewisse quasikonforme Abbildungen als Lösungen bestimmter elliptischer Systeme auf.
Der Verfasser hat im angekündigten Ergebnisheft versucht, dem Leser aus der Fülle der vorhandenen Untersuchungen über quasikonforme Abbildungen einen Gesamtüberblick zu entwerfen, ohne dabei auf Beweisführungen und Anwendungsmöglichkeiten zu verzichten.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg — Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG., Würzburg
Printed in Germany